Ασυμπτωτική Διάσταση Ομάδων

Θάνος Γεντίμης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Εισαγωγή

Στην έννοια της Ασυμπτωτικής διάστασης αναφέρθηκε πρώτος ο Gromov στο βιβλίο του 'Asymptotic invariants of infinite groups' το 1993 [19]. Η όλη θεωρία γνώρισε άνθιση αφότου ο G.Yu στο ([30], 1998) απέδειξε ότι η εικασία του Novikov (higher signature conjecture) ισχύει για ομάδες με πεπερασμένη ασυμπτωτική διάσταση. Από τότε η έννοια της ασυμπτωτικής διάστασης έχει μελετηθεί σε βάθος από πολλούς ερευνητές και έχει βρει αρκετές εφαρμογές στην θεωρία ομάδων.

Με απλά λόγια η ασυμπτωτική διάσταση ενός χώρου είναι η τοπολογική διάσταση που φαίνεται να έχει ο χώρος όταν τον δει κάποιος από μακριά. Αυτή η θεώρηση δίνει και τον όρο ' Ασυμπτωτική'. Σε αυτήν την εργασία θα δείξουμε ότι η ασυμπτωτική διάσταση $asdim$ που αποτελεί γεωμετρική και τοπολογική ιδιότητα δίνει αποτελέσματα σε καθαρά αλγεβρικές ερωτήσεις για την ομάδα όπως: Είναι πεπερασμένη; Σε ποιά ομάδα εμφυτεύται; κ.α. Σε όλη την εργασία όταν λέμε χώρο X θα εννοούμε **μετρικό** χώρο X.

Ο βασικός στόχος αυτής της εργασίας είναι να αποδείξουμε ένα θεώρημα που λέει ότι αν G είναι μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα τότε έχει ασυμπτωτική διάσταση 1 αν και μόνο αν είναι "βασικά ελεύθερη".

Στην δεύτερη παράγραφο της εργασίας θυμίζουμε κάποια αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας τοπολογικής διάστασης. Αποδεικνύουμε πλήρως το "Lebesque's Covering Theorem" (Θεώρημα Κάλυψης Lebesque) και κάποια άλλα θεωρήματα που θα φανούν χρήσιμα στο τελευταίο κομμάτι της εργασίας.

Στο τρίτο κομμάτι αναλύουμε όλα όσα χρειάζονται για να κατανοήσει κανείς την έννοια της ασυμπτωτικής διάστασης. Εδώ μπορεί να βρει κανείς παραδείγματα και μερικά βασικά θεωρήματα όπως το "sum theorem" και το "product theorem" τα οποία εμφανίζονται σχεδόν σε κάθε θεωρία διάστασης.

Στην τέταρτη παράγραφο θυμίζουμε κάποιες έννοιες από την συνδυαστική θεωρία ομάδων και ειδικότερα τα γραφήματα Cayley, τα διαγράμματα van Kampen, καθώς και τον ορισμό και βασικές ιδιότητες των υπερβολικών ομάδων κατά Gromov.

Όλες οι ιδέες που εμφανίζονται σε αυτήν την εργασία χρησιμοποιούνται στην τελευταία παράγραφο (πέμπτη), η οποία περιέχει τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε κατά την διάρκεια αυτής της εργασίας.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι εκτός από την πρώτη παράγραφο οι αποδείξεις που παρουσιάζονται πλήρεις στην υπόλοιπη εργασία είναι προσωπική δουλειά και ενδέχεται να υπάρχουν απλούστερες αποδείξεις. Για μερικά από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ δίνουμε μόνο σκιαγράφηση της απόδειξης ή την παραλείπουμε. Πλήρεις αποδείξεις μπορούν να βρεθούν στην αντίστοιχη βιβλιογραφία.

Τελειώνοντας αυτήν την εισαγωγή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή Π.Παπάζογλου για τις ιδέες του, την υπομονή του, την βοήθεια του και την υποστήριξη του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω έναν νέο φίλο τον G.Bell, για όλα όσα έκανε και με βοήθησε στην συγγραφή αυτής της εργασίας, την οικογένεια μου για όλη της την στήριξη (η εργασία είναι αφιερωμένη σε εσάς!) και όλους τους δασκάλους μου και τους συναδέλφους μου για όλη την βοήθεια τους.

2 Τοπολογική Διάσταση

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στην έννοια της τοπολογικής διάστασης. Πολλές προτάσεις που παρουσιάζονται εδώ δεν συνοδεύονται από τις αποδείξεις τους, καθώς όμοιες προτάσεις υπάρχουν στο κεφάλαιο της ασυμπτωτικής διάστασης που μας ενδιαφέρει.

Ορισμός 2.1 *Ένας χώρος X έχει* **τοπολογική διάσταση** 0 *στο σημείο p αν και μόνο αν το p έχει οσοδήποτε μικρές γειτονιές με κενά σύνορα. Δηλαδή αν για κάθε γειτονιά U του p υπάρχει V γειτονιά του p τέτοια ώστε:*

$$V \subset U,$$

$$\partial V = \emptyset.$$

Ένας μη κενός χώρος X έχει τοπολογική διάσταση 0, $dimX = 0$, αν και μόνο αν ο X έχει διάσταση 0 σε κάθε σημείο p.
Το κενό σύνολο έχει τοπολογική διάσταση -1 εξ' ορισμού.

Παραδείγματα 2.1 *Η απόδειξη των παρακάτω είναι προφανής.*

1. *Το σύνολο Cantor έχει τοπολογική διάσταση 0.*

2. *Κάθε μη κενός πεπερασμένος ή αριθμήσιμος μετρικός χώρος έχει τοπολογική διάσταση 0.*

Ορισμός 2.2 *(**ΔΙΑΣΤΑΣΗ**) Ένας χώρος X έχει στο σημείο p τοπολογική διάσταση $\leqslant n$ ανν το p έχει οσοδήποτε μικρές γειτονιές των οποίων τα σύνορα έχουν τοπολογική διάσταση $\leqslant n-1$.*
Ένας χώρος X έχει διάσταση $\leqslant n-1$ ανν έχει διάσταση $\leqslant n-1$ για κάθε σημείο $p \in X$. Γράφουμε τότε ότι $dimX \leqslant n-1$. Ο X έχει τοπολογική διάσταση n αν δεν ισχύει $dimX \leqslant n-1$ και ισχύει $dimX \leqslant n$.

Παραδείγματα 2.2 *Τα παρακάτω παραδείγματα θα τα αποδείξουμε στην συνέχεια της εργασίας.*

1. *Κάθε διάστημα της ευκλείδειας γραμμής καθώς και όλη η γραμμή έχουν τοπολογική διάσταση 1.*

2. *Κάθε πολύγωνο έχει διάσταση 1.*

3. *Το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ έχει διάσταση 2.*

Συνεχίζουμε τώρα με κάποιους ισοδύναμους ορισμούς της τοπολογικής διάστασης.

Ορισμός 2.3 *(**ΔΙΑΣΤΑΣΗ**) Ένας χώρος X έχει τοπολογική διάσταση $\leqslant n$ ανν υπάρχει βάση του X από ανοικτά σύνολα των οποίων τα σύνορα έχουν διάσταση $\leqslant n-1$.*

Τα 'σύνολα που διαχωρίζουν'(separating sets), παίζουν σπουδαίο ρόλο στην θεωρία της τοπολογικής διάστασης, οπότε θα δώσουμε εδώ τον σχετικό ορισμό.

Ορισμός 2.4 *Λέμε ότι το B **διαχωρίζει** τα C, C' στον X, αν υπάρχουν U_1, U_2 τέτοια ώστε:*

i) $U_1 \bigcup U_2 = X$ - B

ii) $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$

iii) $X \bigcap C \subset U_1$

iv) $X \bigcap C' \subset U_2$

Οπότε ένας άλλος πολύ σημαντικός ορισμός της τοπολογικής διάστασης έρχεται μέσα από τα σύνολα που διαχωρίζουν. Συγκεκριμένα:

Ορισμός 2.5 *(**ΔΙΑΣΤΑΣΗ**) Ένας χώρος X έχει διάσταση $\leqslant n$ αν κάθε σημείο p μπορεί να διαχωριστεί από κάθε κλειστό σύνολο C που δεν περιέχει το p, με ένα κλειστό σύνολο A διάστασης $\leqslant n-1$.*

Η απόδειξη της ισοδυναμίας των ορισμών είναι τετριμμένη. Λεπτομέρειες υπάρχουν στο [20]. Θα συνεχίσουμε αποδεικνύοντας ότι το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ έχει διάσταση 2 και ο $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση n. Για να το πετύχουμε αυτό θα αποδείξουμε το Θεώρημα Κάλυψης του Lebesque το οποίο είναι πολύ χρήσιμο θεώρημα όχι μόνο στην συγκεκριμένη θεωρία αλλά και σε πολλές άλλες θεωρίες όχι αναγκαστικά διάστασης.

Πριν προχωρήσουμε στην καθεαυτή απόδειξη του θεωρήματος θα αποδείξουμε διάφορα λήμματα και θα δώσουμε τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.6 *Ένας μετρικός χώρος λέγεται **γνήσιος(proper)** αν κάθε κλειστή μπάλα του $\overline{S}(x,d)$ είναι συμπαγές σύνολο.*

Ορισμός 2.7 *Ένας χώρος X λέγεται **εντελώς γνήσιος** αν κάθε υπόχωρος του είναι γνήσιος.*

Πρόταση 2.1 *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Κάθε μετρικός χώρος είναι εντελώς γνήσιος.*

2. *Για κάθε δύο σύνολα A_1 και A_2 ενός εντελώς κανονικού χώρου X τέτοια ώστε κανένα από αυτά δεν περιέχει σημείο συσσώρευσης του άλλου υπάρχουν U_1 και U_2 τέτοια ώστε $A_1 \subset U_1$, $A_2 \subset U_2$ καθώς και $U_1 \bigcup U_2 = \emptyset$, $\overline{U_1} \bigcap A_2 = \emptyset$.*

Η απόδειξη αυτής της πρότασης υπάρχει στο [29] σελίδες 262-295.

Λήμμα 2.1 *Αν A ένα κλειστό σύνολο ενός εντελώς κανονικού χώρου X, C, C' κλειστά ξένα υποσύνολα του X και K κλειστό υποσύνολο του A που διαχωρίζει τα $A \bigcap C$ και $A \bigcap C'$ τότε υπάρχει σύνολο B που είναι κλειστό, το οποίο διαχωρίζει τα C και C' στον X, τέτοιο ώστε $A \bigcap B \subset K$.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι υπάρχουν U_1 και U_2 με:

1. $A - K = U_1 \bigcup U_2$,
2. $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$,
3. $X \bigcap C \subset U_1$,
4. $X \bigcap C' \subset U_2$.

Ξεκινάμε με τα σύνολα $C \bigcup U_1$ και $C' \bigcup U_2$. Αυτά είναι προφανώς ξένα. Επίσης κανένα από αυτά δεν περιέχει σημεία συσσώρευσης του άλλου. Οπότε επειδή ο χώρος είναι εντελώς γνήσιος υπάρχει ένα σύνολο $W \subset X$ τέτοιο ώστε $C \bigcup U_1 \subset W$, W ανοικτό και $\overline{W} \bigcap (C' \bigcup U_2) = \emptyset$. θεωρούμε $B = \partial W$ το σύνορο του W. Οπότε βλέπουμε ότι το B διαχωρίζει τα C και C' στον X επειδή:

$$X - B = W \bigcup (\overline{W})^c$$

$$C \subset W \text{ και } C' \bigcap (\overline{W}) = \emptyset \Rightarrow C' \subset (\overline{W})^c$$

$$W \bigcap (\overline{W})^c = \emptyset.$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$B \bigcap (U_1 \bigcup U_2) = (B \bigcap U_1) \bigcup (B \bigcap U_2) = \emptyset.$$

Αυτό ισχύει γιατί $U_1 \subset W$ και το W είναι ανοικτό, άρα $\partial W \bigcup W = \emptyset$ και $U_1 \bigcup \partial W = U_1 \bigcup B = \emptyset$. Όμοια $U_2 \bigcup B = \emptyset$.
Οπότε $B \bigcap (A - K) = \emptyset \Rightarrow A \bigcup B \subset K$ γιατί αν $\exists\, x$ τέτοιο ώστε $x \in A \bigcap B$ και $x \notin K$ τότε $x \in B$ και $x \in (A - K) \Rightarrow B \bigcap (A - K) \neq \emptyset$ άτοπο! Οπότε ισχύει το λήμμα. ■

Θεώρημα 2.1 Σταθερού σημείου του Brouwer.
Μια συνεχείς συνάρτηση f από μια σφαιρική περιοχή K_n του E_n[1] *στον εαυτό της έχει πάντα σταθερό σημείο. Δηλαδή υπάρχει σημείο p στο K_n τέτοιο ώστε $f(p) = p$.*

Το παραπάνω θεώρημα, μπορεί να δείξει εύκολα κανείς ότι, ισχύει και για επιφάνειες ομοιομορφικές με τον κύκλο δηλαδή ισχύει και για την επιφάνεια του n-διάστατου μοναδιαίου κύβου. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι αρκετά περίπλοκη. Περισσότερες λεπτομέρειες υπάρχουν στο [20] σελίδα 40.

Λήμμα 2.2 *Έστω I_n να είναι ο n-διάστατος κύβος και C_i, C_i' $i = 1, 2, .., n$ τα ζεύγη των απέναντι εδρών του. Έστω ακόμα B_i κλειστά σύνολα που διαχωρίζουν τα C_i, C_i', $\forall\ i = 1, 2, ..n$ στον I_n. Τότε $B_1 \bigcap B_2 \bigcap ... \bigcap B_n \neq \emptyset$*

Απόδειξη. Έχουμε ότι το B_i διαχωρίζει τα C_i, C_i' στον I_n οπότε υπάρχουν U_i και U_i' ανοικτά στον $I_n - B_i$ τέτοια ώστε:

$$I_n - B_i = U_1 \bigcup U_1',$$

$$C_i \subset U_1\ ,\ C_1' \subset U_i' \ \textit{και}$$

$$U_i \bigcap U_i' = \emptyset$$

Έστω v(x) το διάνυσμα του οποίου η i-στη συνιστώσα έχει τη τιμή $\pm\ d(x, B_i)$. Θέτουμε $d(x, B_i) = inf\{d(x, b), b \in B_i\}$ και βάζουμε $+$ αν $x \ \in U_i$ και $-$ αν $x \ \in U_i'$. Βάζουμε το διάνυσμα $v(x)$ με την αρχή του στο x. Θέτουμε $f(x) = \{$το τελικό σημείο του διανύσματος$\}$. Τότε η f(x) είναι συνεχής συνάρτηση του I_n.(αποδεικνύεται εύκολα!)
Από το **Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer** παίρνουμε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. Αυτό σημαίνει ότι $d(x_0, B_i) = 0$ και αφού B_i κλειστό έχουμε ότι $x_0 \in B_i$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$. Οπότε έχουμε το λήμμα.
■

Λήμμα 2.3 *Ας θεωρήσουμε C_i' και C_i να είναι τα ζεύγη των απέναντι εδρών του I_n*[2] *με $i = 1, 2, ...n$. Θεωρούμε ότι $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset ...$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων του I_n τέτοια ώστε, K_1 διαχωρίζει τα C_1 και C_1' στο I_n, K_2 διαχωρίζει τα $K_1 \bigcap C_2$ και $K_1 \bigcap C_2'$ στο K_1 κ.ο.κ, K_n διαχωρίζει τα $K_{n-1} \bigcap C_n$ και $K_{n-1} \bigcap C_n'$ στο K_{n-1}. Τότε K_n είναι μη κενό.*

[1] E_n = Μπάλα n διάστασης
[2] Ο μοναδιαίος n-διάστατος κύβος

Απόδειξη. Θέτω $B_1 = K_1$ τότε από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει ακολουθία $B_1, B_2, ..., B_n$ με τις ιδιότητες:

1. το B_i διαχωρίζει το C_i και το C_i' στον I_n,

2. το $B_1 = K_1$ και $B_i \bigcup K_{i-1} \subset K_i$ για κάθε $i = 1, 2, ..., n$.

Οπότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $B_1 \bigcap B_2 \bigcap ... \bigcap B_n \subset K_n$. Μένει να δείξουμε ότι $B_1 \bigcap B_2 \bigcap ... \bigcap B_n \neq \emptyset$ το οποίο δείξαμε σε προηγούμενο λήμμα. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη και αυτού του λήμματος. ■

Τώρα έχουμε όλα τα εργαλεία για να αποδείξουμε το Θεώρημα Κάλυψης του Lebesque.

Θεώρημα 2.2 Θεώρημα Κάλυψης Lebesque*:*
Έστω I_n ο n-διάστατος κύβος και έστω $\mathbb{B}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων B_i, $i = 1, 2, ..., r$ που αποτελούν κάλυμμα του I_n κανένα από τα οποία δεν τέμνει δύο απέναντι έδρες ταυτόχρονα. Τότε τουλάχιστον $n + 1$ από αυτά τα σύνολα έχουν ένα κοινό σημείο.

Απόδειξη. Θέτουμε :

$L_1 = \bigcup\ B\ \{B \subset \mathfrak{B},\ B\ \bigcap\ C_1 \neq \emptyset\}$,
$L_2\ =\ \bigcup\ B\ \{B \subset \mathfrak{B}$ και δεν μετέχουν στον σχηματισμό του L_1 με $B\ \bigcap\ C_2 \neq \emptyset\}$ και όμοια:
$L_n\ =\ \bigcup\ B\ \{B \subset \mathfrak{B}$ και δεν μετέχουν στον σχηματισμό των L_i $\forall i \leqslant n-1$ με $B\ \bigcap\ C_n \neq \emptyset\}$.
Οπότε κατασκευάζουμε μια άλλη ακολουθία:

$K_1 = L_1 \bigcap (L_2 \bigcup L_2 \bigcup ... \bigcup L_{n+1})$,

$K_2 = L_1 \bigcap L_2 \bigcap (L_3 \bigcup ... \bigcup L_{n+1})$, ...

$K_{n-1} = L_1 \bigcap L_2 \bigcap ... \bigcap L_{n-1} \bigcap (L_n \bigcup L_{n+1})$

$K_n = L_1 \bigcap L_2 \bigcap ... \bigcap L_{n+1}$.

Αυτά τα K_i ικανοποιούν τα ακόλουθα:

1. $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n$ (προφανώς),

2. Είναι κλειστά (δείχνεται εύκολα),

3. K_1 διαχωρίζει το C_1 και το C_1' στον I_n, K_2 διαχωρίζει το $K_1 \bigcap C_2$ και το $K_1 \bigcap C_2'$ στο K_1 και ομοίως, K_n διαχωρίζει το $K_{n-1} \bigcap C_n$ και το $K_{n-1} \bigcap C_n'$ στο K_{n-1}.

Οπότε από το προηγούμενο λήμμα το K_n είναι μη κενό.

Άρα $L_1 \bigcap L_2 \bigcap ... \bigcap L_{n+1} \neq \emptyset$. Δηλαδή $L_i \neq \emptyset$, $\forall\ i = 1, 2, ..., n+1$. Αυτό αποδεικνύει ότι υπάρχουν $n+1$ διαφορετικά B_i του καλύμματος με $B_i \in L_i$, $i = 1, , 2, ..., n$ και $B_i \notin L_j$ for $j \neq i$ τέτοια ώστε:

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Ας διατυπώσουμε μερικές προτάσεις που θα μας βοηθήσουν πιο κάτω.

Πρόταση 2.2 *Για τους υπόχωρους.*

1. *Ένα υποσύνολο A ενός χώρου X διάστασης $\leqslant n$ έχει διάσταση $\leqslant n$.*

2. *Αν A υποσύνολο ενός χώρου X και A έχει διάσταση $\geqslant n$ τότε ο X έχει διάσταση $\geqslant n$.*

Προφανώς το πρώτο είναι το αντιθετο-αντίστροφο του δεύτερου αλλά γράφουμε και τα δύο γιατί και τα δύο χρησιμοποιούνται στην θεωρία αυτή και είναι πιο σημαντικά από ότι δείχνουν αρχικά.

Πρόταση 2.3 The Sum Theorem
Αν ο X είναι η αριθμήσιμη ένωση χώρων διάστασης $\leqslant n$ τότε έχει διάσταση $\leqslant n$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι αρκετά τεχνική και ξεφεύγει από το πνεύμα της παρούσας εργασίας. Πλήρης απόδειξη υπάρχει στο [20] σελίδα 30.

Πρόταση 2.4 The Product Theorem
Έστω $A \times B$ το τοπολογικό γινόμενο A και B και έστω ότι ένας από αυτούς είναι μη κενός. Τότε $dim(A \times B) \leqslant dimA + dimB$.

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι σχετικά εύκολη και στηρίζεται στην επαγωγή ως προς τις διαστάσεις των A και B. Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό της διάστασης του $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 2.1 *Κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ είναι μετρικός χώρος διάστασης 0.*

Πραγματικά προφανές!

Πρόταση 2.5 *Ο $\mathbb{R}$ έχει τοπολογική διάσταση 1. Συμβολικά $dim\mathbb{R} = 1$.*

Απόδειξη. Έστω p σημείο στον $\mathbb{R}$, τότε κάθε γειτονιά του p είναι ένα ανοικτό διάστημα $A = (a, b)$ γύρω από το p με $\partial A = \{a, b\}$ και $dim\{a\} = dim\{b\} = 0$. Χρησιμοποιώντας το "Sum Theorem" έχουμε $dim\partial A \leqslant 0$ και αφού $\partial A \neq \emptyset$ έχουμε ότι $dim\partial A > -1$. Οπότε $dim\partial A = 0$ άρα $dim\mathbb{R} \leqslant 1$.
Αν $dim\mathbb{R} \leqslant 0$ τότε θα υπήρχε ένα q στον $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να υπήρχε μια γειτονιά N του q με $dim\partial N \leqslant -1 \Rightarrow dim\partial N = -1 \Rightarrow \partial N = \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο αφού $N = (c, d)$ και $\partial N = \{a, b\} \Rightarrow \partial N \neq \emptyset$. Αυτό αποδεικνύει ότι $dim\mathbb{R} \leqslant 1$ ισχύει και $dim\mathbb{R} \leqslant 0$ δεν ισχύει. Άρα $dim\mathbb{R} = 1$. ∎
Παραθέτουμε τώρα κάποιους ορισμούς και θεωρήματα για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την διάσταση του I_n, δηλαδή του n-διάστατου κύβου.

Ορισμός 2.8

1. **Κάλυμμα (covering)** *ενός χώρου X είναι μια πεπερασμένη συλλογή ανοικτών συνόλων $U_1, U_2, ...U_r$ τέτοια ώστε:*

$$\bigcup_{i=1}^{r} U_i = X$$

2. *Η* **τάξη (order)** *ενός καλύμματος είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος n τέτοιος ώστε υπάρχουν $n + 1$ σύνολα του καλύμματος που τέμνονται.*

3. *Αν ο X είναι φραγμένος ονομάζουμε* **άνοιγμα (mesh)** *ενός καλύμματος την μεγαλύτερη από τις διαμέτρους των U_i.*

4. *Ένα κάλυμμα $k = \{U_1, U_2, ...U_r\}$ είναι μια* **επιλέπτυνση (refinement)** *του $m = \{V_1, V_2, ...V_s\}$ αν κάθε σύνολο του k περιέχεται σε κάποιο σύνολο του m.*

Ορισμός 2.9 (ΔΙΑΣΤΑΣΗ) Θεώρημα Κάλυψης για Συμπαγής Χώρους *Ένας συμπαγής χώρος έχει διάσταση $\leqslant n$ αν και μόνο αν έχει καλύμματα με οσοδήποτε μικρό άνοιγμα και τάξη $\leqslant n$.*

Η απόδειξη του παραπάνω ισοδύναμου ορισμού είναι αρκετά τεχνική και δεν θα μας απασχολήσει. Έναν αντίστοιχο ορισμό δίνουμε στο επόμενο κεφάλαιο και αφορά την Ασυμπτωτική Διάσταση. Γι' αυτόν τον ορισμό θα δούμε όλες τις λεπτομέρειες, τότε.

Πρόταση 2.6 *Ο n-διάστατος κύβος I_n έχει διάσταση $\geqslant n$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει. Τότε $dim I_n \leqslant n-1$. Άρα ο I_n έχει καλύμματα με οσοδήποτε μικρό άνοιγμα και τάξη $\leqslant n-1$. Διαλέγοντας τον άνοιγμα πολύ μικρό δηλαδή της τάξης του 10^{-100} επιτυγχάνουμε τα σύνολα του καλύμματος να μην έχουν κοινό σημείο με δύο από τις απέναντι πλευρές του κύβου. Οπότε από το θεώρημα κάλυψης του Lebesque έχουμε ότι τουλάχιστον n + 1 από αυτά τα σύνολα έχουν ένα κοινό σημείο. Αυτό μας λέει ότι η τάξη του καλύμματος είναι τουλάχιστον n. Αυτό είναι άτοπο άρα ισχύει η πρόταση. ■

Πρόταση 2.7 *Ο Ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση $dim\mathbb{R}^n = n$. Κατά συνέπεια και ο n-διάστατος κύβος I_n έχει διάσταση $dim I_n = n$.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι $dim\, \mathbb{R}^n \leqslant n$.
Πράγματι έχουμε ότι:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n}$$

οπότε από το product theorem έχουμε:

$$dim\mathbb{R}^n \leqslant \underbrace{dim\mathbb{R} + dim\mathbb{R} + ... + dim\mathbb{R}}_{n} =$$

$$\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{n} = n,$$

καθώς $dim\mathbb{R} = 1$. Οπότε $dim\mathbb{R} \leqslant n$.
Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το $dim\mathbb{R} \leqslant n-1$ δεν ισχύει.
Προφανώς I_n, ο n-διάστατος κύβος, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Είδαμε ότι $dim I_n \geqslant n$ Οπότε από την πρόταση για τους υπόχωρους έχουμε $dim\mathbb{R} \geqslant n$ οπότε $dim\mathbb{R} \leqslant n-1$ δεν ισχύει. Άρα έχουμε την πρόταση. ■

Η τοπολογική διάσταση δεν μένει αναλλοίωτη κάτω από συνεχείς συναρτήσεις. Κάτι περισσότερο χρειάζεται και αυτό είναι ο ομοιομορφισμός.

Ορισμός 2.10 *Έστω X και Y δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια συνάρτηση με:*

i) *f είναι "1-1",*

ii) *f είναι "επί",*

iii) *f είναι συνεχής,*

iv) f^{-1} *είναι συνεχής.*

Τότε λέμε ότι η f *είναι ένας* **ομοιομορφισμός (homeomorphism)** *μεταξύ του* X *και του* Y *και ότι οι δύο χώροι είναι* **ομοιομορφικοί**.

Η παρακάτω πρόταση έρχεται φυσιολογικά.

Πρόταση 2.8 *Δύο ομοιομορφικοί χώροι έχουν την ίδια διάσταση.*

Μια αντίστοιχη απόδειξη θα δώσουμε για την Ασυμπτωτική Διάσταση στην επόμενη παράγραφο που μοιάζει αρκετά με την απόδειξη της παραπάνω πρότασης.

3 Ασυμπτωτική Διάσταση

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί ένα από τα κύρια κομμάτια της διπλωματικής. Εδώ παρουσιάζεται η ιδέα της ασυμπτωτικής διάστασης. Δίνονται όλοι οι σχετικοί ορισμοί, μερικά παραδείγματα και αρκετά θεωρήματα της εν λόγω θεωρίας. Αποτελεί απαραίτητο εισαγωγικό κομμάτι για την κατανόηση της όλης εργασίας.

Ορισμός 3.1 *Ένας χώρος X λέγεται* **d-αραιός (d-disconnected)** *ή λέμε ότι έχει διάσταση 0 στην d-κλίμακα (d-scale) αν υπάρχει οικογένεια $\mathfrak{B} = \{B_i\}$, $i \in I$ τέτοια ώστε:*

1. $$X = \bigcup_{i \in I} B_i,$$

2. $sup\{diam B_i, i \in I\} \leqslant D < \infty$,

3. $dist(B_i , B_j) \geqslant d$, $\forall\ i \neq j$. [3]

Προφανώς ένα σύνολο Y του X είναι **d-αραιό** *αν είναι* **d-αραιός** *χώρος, όταν θεωρηθεί ως υπόχωρος του χώρου X.*

Η ιδιότητα 2 είναι αρκετά σημαντική οπότε δίνουμε ένα ξεχωριστό ορισμό για καλύμματα που την ικανοποιούν. Συγκεκριμένα λέμε ότι:

Ορισμός 3.2 *Ένα κάλυμμα $\{B_i\}$, $i \in I$ είναι:* **ομοιόμορφα D-φραγμένο (uniformly D-bounded)**, *αν $diam(B_i) \leqslant D$, $\forall i \in I$.*

Ο παραπάνω ορισμός είναι αντίστοιχος με τον ορισμό του "ανοίγματος" που υπάρχει την τοπολογική διάσταση. Μετά από όλα αυτά είμαστε έτοιμοι να δώσουμε ένα πρώτο ορισμό της ασυμπτωτικής διάστασης ενός χώρου.

Ορισμός 3.3 *(***ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ***) Λέμε ότι ένας χώρος X έχει ασυμπτωτική διάσταση n, αν ο n είναι ο ελάχιστος φυσικός τέτοιος ώστε για κάθε $d > 0$ έχουμε:*

$$X = \bigcup_{k=0}^{n} X_k$$

όπου X_k είναι d-αραιό για κάθε k. Γράφουμε τότε $asdim\, X = n$.

[3]όπου $\text{dist}(B_i , B_j) = \inf\ \{\text{dist}(a,b)\ a \in B_i , b \in B_j\}$

Παρατήρηση 3.1 *Μπορεί κάποιος να καταλάβει εύκολα ότι αν ένας χώρος έχει ασυμπτωτική διάσταση 0 τότε είναι d-αραιός για κάθε $d > 0$ και το αντίστροφο.*

Ακολουθεί ένας αντίστοιχος ορισμός της "τάξης" στην ασυμπτωτική διάσταση.

Ορισμός 3.4 *Ένα κάλυμμα $\mathfrak{B}$ έχει* **d-βαθμό (d-multiplicity)**, *k αν και μόνο αν, κάθε d-μπάλα $S(x,d)$ του X τέμνει το πολύ k σύνολα B_i του καλύμματος.*

Οπότε καταλήγουμε σε έναν δεύτερο ορισμό:

Ορισμός 3.5 *(* **ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ** *) Λέμε ότι ένας χώρος X έχει $\operatorname{asdim} X = n$, αν n είναι ο ελάχιστος φυσικός ώστε, $\forall\, d > 0$ υπάρχει ένα κάλυμμα του X από ομοιόμορφα D-φραγμένα σύνολα B_i τέτοια ώστε d-βαθμός $\leqslant n + 1$.*

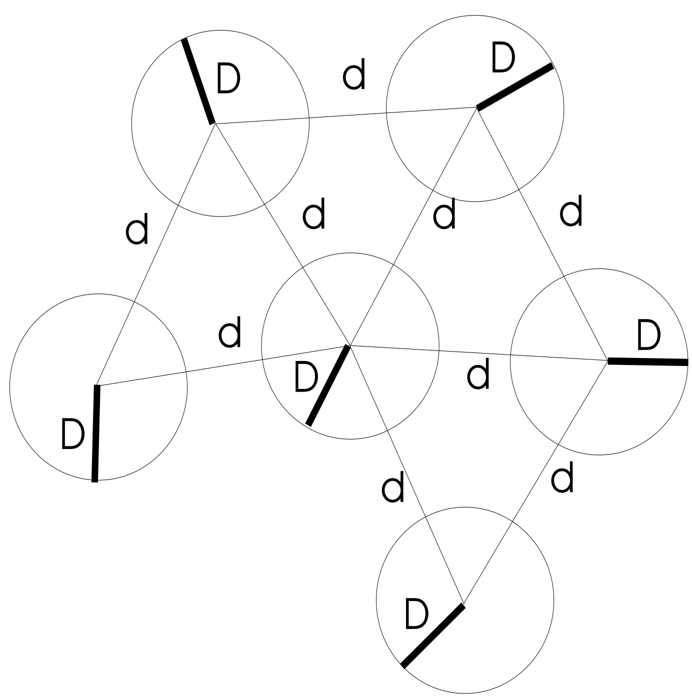


Figure 1: Ασυμπτωτική διάσταση 0.

Παραπάνω η ένωση των κύκλων είναι ένα παράδειγμα d-αραιού D-φραγμένου συνόλου. Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό του "χρωματισμένου" καλύμματος.

Ορισμός 3.6 *Λέμε ότι ένα κάλυμμα είναι m-***χρωματισμένο (m-colored)** *αν είναι ένωση $m \geqslant 1$ ξένων ανά δύο οικογενειών*

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{i=1}^{m} U_i,$$

έτσι ώστε κάθε οικογένεια U_i αποτελείται από D-φραγμένα σύνολα.

Οπότε έχουμε τον ισοδύναμο ορισμό που βοηθάει στην εποπτεία διαφόρων προβλημάτων υπολογισμού της ασυμπτωτικής διάστασης σε απλά προβλήματα:

Ορισμός 3.7 *(***ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ***) Ένας χώρος X έχει ασυμπτωτική διάσταση $\leqslant n$ αν δέχεται ένα $n+1$-χρωματισμένο κάλυμμα από d-αραιά σύνολα.*

Παρατήρηση 3.2 *Ο κενός χώρος έχει ασυμπτωτική διάσταση -1 εξ ορισμού. Επίσης είναι προφανές ότι κάθε μη κενός χώρος έχει καλύμματα με d-βαθμό τουλάχιστον 1. Άρα για κάθε μη κενό χώρο X έχουμε $asdim\, X \geqslant 0$.*

Πρόταση 3.1 *Κάθε φραγμένος, μη κενός χώρος X έχει $asdim\, X = 0$.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι φραγμένος υπάρχει $D < \infty$ τέτοιο ώστε $X \subset B(x_0, D)$. Οπότε για κάθε $d > 0$ χρησιμοποιούμε το κάλυμμα $\mathfrak{B} = \{B(x_0, D)\}$. Είναι προφανές ότι ο d-βαθμός είναι 1. Από τον δεύτερο ορισμό έχουμε ότι $asdim X \leqslant 0$ και αφού για κάθε μη κενό χώρο έχουμε $asdim\, X \geqslant 0$ έχουμε $asdim\, X = 0$. ■

Πόρισμα 3.1 *Κάθε συμπαγής χώρος X έχει $asdim\, X = 0$*

Προφανώς αφού κάθε συμπαγής είναι και φραγμένος.

Μετά από αυτήν την πρόταση καταλαβαίνουμε ότι το να δουλεύουμε με την ασυμπτωτική διάσταση δίνει αποτελέσματα μόνο στις μη φραγμένες περιπτώσεις.

Παράδειγμα 3.1 $asdim\, \mathbb{R} = 1$

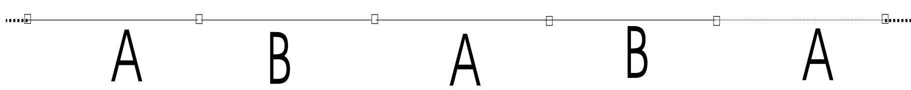
Απόδειξη. Έστω $d \in \mathbb{N}$. Αν $d \notin \mathbb{N}$ θεωρούμε $d = [d] + 1$ και ορίζουμε:
$A_0 = [0, d+1)$, $B_0 = [d+1, 2(d+1))$
$A_i = [(i+1)(d+1), (i+2)(d+1))$ αν i είναι περιττός και
$[-i(d+1), -(i-1)(d+1))$ αν i είναι άρτιος, καθώς και

$B_i = [i(d+1), (i+1)(d+1)$ αν i είναι περιττός και
$[-(i-1)(d+1), -(i-2)(d+1))$ αν i είναι άρτιος. Τότε έχουμε ότι:

$$A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i \text{ και } B = \bigcup_{i=0}^{n} B_i \text{ με :}$$

1. $diam(A_i) \leqslant (d+1)$ και $diam(B_i) \leqslant (d+1)$. Αυτό σημαίνει ότι A και B είναι ομοιόμορφα D-φραγμένα καλύμματα όπου $D = d+1$,
2. $dist(A_i, A_j) \geqslant (d+1) > d, \forall\ i \neq j$ και $dist(B_i, B_j) \geqslant (d+1) > d, \forall\ i \neq j$. Αυτό σημαίνει ότι τα A και B είναι d-αραιά,
3. $X = A \bigcup B$.

Από τον πρώτο ορισμό έχουμε ότι $asdim\,\mathbb{R} \leqslant 1$. Αφού $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικός μετρικός χώρος μη φραγμένος έχουμε $asdim\,\mathbb{R} \neq 0$. Οπότε $asdim\,\mathbb{R} = 1$. Η απόδειξη φαίνεται καλύτερα με το παρακάτω σχήμα.



■

Συνεχίζοντας δίνουμε μια απόδειξη της ισοδυναμίας των ορισμών για "γεωδαισιακούς μετρικούς χώρους". Στην πορεία της εργασίας μας θα δούμε ότι, οι ομάδες που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε δίνουν γεωδαισιακούς μετρικούς χώρους. Ας δούμε τώρα τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.8 *Έστω X ένας μετρικός χώρος και $a, b \in X$. Ένα* **μονοπάτι** *από το a στο b είναι μια συνεχής συνάρτηση $p : [0,k] \to X$ με $p(0) = a$ και $p(k) = b$. Τις περισσότερες φορές δεν κάνουμε διάκριση μεταξύ του μονοπατιού p και της εικόνας του $p([0,k])$.*

Ορισμός 3.9 *Ορίζουμε* **μήκος (length)** *ενός μονοπατιού να είναι:*

$$\ell(p) = length(p) = sup\{\sum_{i=0}^{n} d(p(t_i), p(t_{i+1}))\},$$

όπου $t_0, t_1, ..., t_n$ μια διαμέριση του $[0,1]$.

Ορισμός 3.10 *Ένας μετρικός χώρος X ονομάζεται* **γεωδαισιακός** *μετρικός χώρος αν για όλα τα $a, b \in X$ υπάρχει μονοπάτι $p : [0,1] \to X$ με $p(0) = a$, $p(b) = b$ και $\ell(p) = d(a,b)$.*

Πρόταση 3.2 *Οι δύο πρώτοι ορισμοί της Ασυμπτωτικής Διάστασης,* 3.3, 3.5 *είναι ισοδύναμοι για γεωδαισιακούς μετρικούς χώρους.*

Απόδειξη. Έστω X γεωδαισιακός μετρικός χώρος με $asdim\, X \leqslant n$, βάσει του πρώτου ορισμού. Έστω $d > 0$. Τότε υπάρχουν $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$ οικογένειες συνόλων ώστε:

1. $$X_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{ij}\, \forall i = 1, 2, .., n,$$

2. $$X_i \text{ ειναι } 2d - \text{αραιά},$$

3. $$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i.$$

Συγκεντρώνουμε όλα τα B_{ij} και ορίζουμε το κάλυμμα $\mathfrak{B} = \{B_s\}$ οπότε:

$$X = \bigcup_{B_s \in \mathfrak{B}} B_s.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\mathfrak{B}$ είναι κάλυμμα του X. Έστω x σημείο του X και $B_d(x) = \{y \in X \text{ τέτοια ώστε } dist(x, y) \leqslant d\}$, η d-μπάλα του x. Αν $B_d(x)$ έτεμνε $n + 2$ σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$ τότε τουλάχιστον δύο από αυτά θα βρίσκονταν στην ίδια οικογένεια X_k. Τα ονομάζω B_1 και B_2. Αφού το X_k είναι $2d$-αραιό έχουμε ότι $dist(B_1, B_2) > 2d$. Έχουμε ακόμα ότι:
$B_d(x) \bigcap B_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_1 \in B_1 \bigcap B_d(x)$ και
$B_d(x) \bigcap B_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_2 \in B_2 \bigcap B_d(x)$.
Αφού $x_1, x_2 \in B_d(x) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leqslant d$.
Αφού $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2 \Rightarrow dist(B_1, B_2) \leqslant d(x_1, x_2) \leqslant d$. Άτοπο.

Άρα έχουμε ότι $\forall\, d > 0$ υπάρχει ένα κάλυμμα του X,

$$X = \bigcup_{s \in S} B_s$$

τέτοιο ώστε ο d-βαθμός να είναι $\leqslant n + 1$. Αυτό σημαίνει ότι $asdim\, X \leqslant n$ σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό.
Αντίστροφα τώρα έστω X να είναι μετρικός χώρος με $asdimX \leqslant n$ σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό.

α) Αν $n = 0$ τότε $asdim\, X = 0$. Άρα υπάρχει ένα κάλυμμα του X, $\mathfrak{B} = \{B_i\}$ τέτοιο ώστε κάθε μπάλα $B(x, 2d)$ τέμνει το πολύ ένα B_i. Ονομάζουμε τότε:

$$X_1 = \bigcup_{i\ \in I} B_i.$$

Τότε κάθε B_i είναι D-φραγμένο. Επίσης η οικογένεια X_1 είναι d-διακριτή αφού αν $d(B_i, B_j) \leqslant d$ τότε υπάρχει $x_1\ \in B_i$ και $x_2\ \in B_j$ τέτοια ώστε $d(x_1, x_2) \leqslant d$. Αφού X είναι γεωδαισιακός χώρος ορίζουμε ένα x στο X τέτοιο ώστε x είναι στην γεωδαισιακή $[x_1, x_2]$ και $d(x_1, x) = d(x_2, x)$ δηλαδή το μέσο. Τότε η μπάλα $B(x, 2d)$ περιέχει τα x_1 και x_2, που σημαίνει ότι η μπάλα $B(x, 2d)$ τέμνει τόσο το B_i όσο και το B_j. Άτοπο. Οπότε X_1 είναι d-αραιό και έχουμε ότι $asdim\, X = 0$ σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό.

β) Αν $n \neq 0$ τότε για κάθε $d > 0$ υπάρχει ένα κάλυμμα $\mathfrak{B} = \{B_i\}\ i \in I$, τέτοιο ώστε:

1. $diam B_i \leqslant D\ \forall\ i \in I$
2. Κάθε $10^{n+1} * d$-μπάλα κάθε σημείου x τέμνει $n + 1$ το πολύ, σύνολα B_i του καλύμματος $\mathfrak{B}$ και
3. $$X = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Έστω $d_k = 4^k * d$ για $k = 1, 2, ..., n + 1$. Τότε ορίζουμε: $X_k = \{x \in X : B(x, d_k)\ \textit{και}\ B(x, d_{k+1})$ τέμνουν ακριβώς k σύνολα του καλύμματος $\}$. Αφού μια d_k-μπάλα περιέχεται σε μια $10^{n+1} * d$-μπάλα που μπορεί να τέμνει το πολύ $n + 1$ σύνολα του καλύμματος έχουμε ότι $X_k = \emptyset\ , \forall\ k \geqslant n + 2$. Προφανώς:

$$X = \bigcup_{k=1}^{n+1} X_k.$$

Θα αποδείξουμε ότι τα X_k είναι d-αραιά οπότε από τον 1ο ορισμό της ασυμπτωτικής διάστασης θα έχουμε ότι $asdim\, X \leqslant n$.
Στο υποσύνολο X_k θεωρούμε την σχέση $x \sim y$ αν $\exists\ x_1, x_2, ..., x_t$ τέτοια ώστε:

1. $x_i \in X_k\ \forall\ i = 1, 2, ..., t,$
2. $x = x_1$ και $y = x_t,$

3. $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant d_k \ \forall \ t = 1, 2, ..., t-1$.

Η παραπάνω είναι σχέση ισοδυναμίας αφού

a) Αν $x \sim y$ θεωρώντας την αρίθμηση των x_i ανάποδα έχουμε ότι $y \sim x$.

b) $x \sim x$ είναι προφανές.

c) Αν τώρα $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε $x \sim z$.

Το τελευταίο ισχύει πράγματι αφού υπάρχουν:
$x = x_1, x_2, ...x_m = y$ και $y = x'_1, x'_2, ..., x'_s = z$ με τις παραπάνω ιδιότητες. Οπότε έχουμε $x = x_1, x_2, ...x_m = y = x'_1, x'_2, ..., x'_s = z$. Θέτουμε $x_{m+i} = x'_i$ οπότε $x = x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+s} = z$ με $x_i \in X_k \ \forall \ i = 1, 2, ..., m+s$ και $d(x_i, x_{i+1}) \leqslant d_k \ \forall \ i = 1, 2, ..., m+s-1$, άρα $x \sim z$.
Ονομάζουμε $S_1, S_2, ..., S_t, ...$ τις κλάσεις ισοδυναμίας. Τότε S_i είναι κλειστά σύνολα με:

$$X_k = \bigcup_{i \in I} S_i.$$

Επίσης $dist(S_i, S_j) > d_k$ για $i \neq j$ καθώς αν $dist(S_i, S_j) \leqslant d_k$, τότε θα υπήρχαν $x_1 \in S_i$ και $x_2 \in S_j$ με $dist(x_1, x_2) \leqslant d_k$. Όμως τότε $x_1 \sim x_2$. Αυτό σημαίνει ότι $x_1 \in S_j$ και $x_2 \in S_i$. Ακόμα $x_1 \in S_i$ οπότε $S_i \bigcap S_j \neq \emptyset$. Άτοπο αφού για $i \neq j$ οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ξένες. Οπότε $dist(S_i, S_j) > d_k \Rightarrow dist(S_i, S_j) > 4^k * d > d$. Ακόμη κάθε S_i είναι L-φραγμένο. Πράγματι θέτω $L = 10(n+1)D$ όπου D η μεγαλύτερη διάμετρος των B_i συνόλων του καλύμματος $\mathfrak{B}$. Αν S_i δεν ήταν L-φραγμένο τότε για κάποιο $i \in I$ θα είχαμε $diam(S_i) > L$. Έστω S_0 η κλάση ισοδυναμίας του X_k με $diam(S_0) > L$. Τότε αφού $diam(S_i) > L$ η S_0 τέμνει περισσότερα από $n+1$ σύνολα του $\mathfrak{B}$ καλύμματος. Αφού το k είναι μικρότερο ή ίσο του $n+1$ έχουμε ότι η S_0 τέμνει περισσότερα από k σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$. Οπότε υπάρχουν x_0 και x_1 στο S_0 τέτοια ώστε:

1. $B(x_0, d)$ τέμνει k σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$, τα $B_1, B_2, ..., B_{k+1}$,

2. $B(x_1, d)$ τέμνει k σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$, τα $B'_1, B'_2, ..., B'_{k+1}$ με τουλάχιστον ένα από τα B'_j να είναι διαφορετικό από τα B_i,

3. $dist(x_0, x_1) \leqslant d_k$.

Τότε $B(x_0, d_{k+1}) = B(x_0, 4d_k)$ που περιέχει και τις δύο μπάλες $B(x_0, d_k)$, $B(x_1, d_k)$. Οπότε η μπάλα $B(x_0, d_{k+1})$ τέμνει τουλάχιστον $k+1$ σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$. Άτοπο αφού από τον ορισμό του X_k η μπάλα $B(x_0, d_{k+1})$ πρέπει να τέμνει k σύνολα του $\mathfrak{B}$ καθώς x_0 ανήκει στο X_k. Άρα $diam(S_i) < L$

που σημαίνει ότι τα X_k είναι d-αραιά και τα S_i είναι ομοιόμορφα L-φραγμένα για $L = 10(n+1)D$. Τελικά δείξαμε ότι:
$asdim\, X \leqslant n$ σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό $\Leftrightarrow$
$asdim\, X \leqslant n$ σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό.
Συνδυάζοντας με την αντιθετο-αντίστροφη της παραπάνω σχέσης έχουμε:
$asdim\, X = n$ σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό $\Leftrightarrow$
$asdim = n$ σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό. ■

Θα διατυπώσουμε τώρα ένα θεώρημα για την ασυμπτωτική διάσταση του γινομένου δύο χώρων το οποίο αποδεικνύεται πολύτιμο. Γενικά σε κάθε θεωρία διάστασης υπάρχει, ή τουλάχιστον θέλουμε να υπάρχει ένα ανάλογο θεώρημα (υπάρχει και στην Τοπολογική διάσταση όπως είδαμε πριν). Θυμίζουμε ότι ένας μετρικός χώρος λέγεται **γνήσιος(proper)** αν κάθε κλειστή μπάλα του $\overline{S}(x,d)$ είναι συμπαγές σύνολο.

Θεώρημα 3.1 *(**THE PRODUCT THEOREM**) Έστω X και Y κανονικοί μετρικοί χώροι τότε:*

$$asdim\,(X \times Y) \leqslant asdim\, X + asdim\, Y$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι αρκετά πολύπλοκη και προκύπτει από έναν άλλον ισοδύναμο ορισμό της ασυμπτωτικής διάστασης. Συγκεκριμένα:

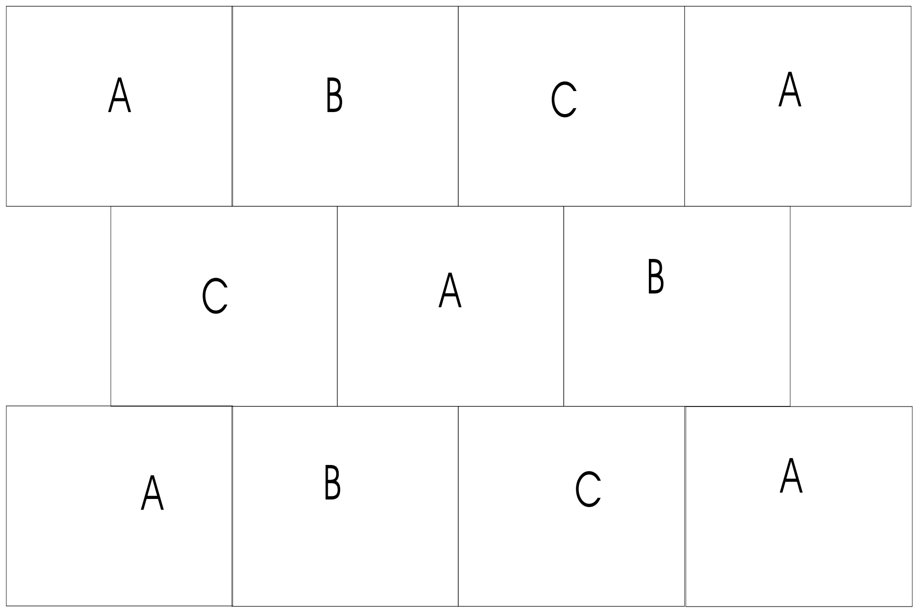
Ορισμός 3.11 *(**ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ**) Ένας χώρος X έχει ασυμπτωτική διάσταση n αν ο X δέχεται μια anti-Čech ακολουθία από καλύμματα βαθμού $\leqslant n+1$.*

Για περισσότερες λεπτομέρειες και γενικές πληροφορίες τόσο για τον ορισμό όσο και για την απόδειξη του θεωρήματος βλέπε [3] και [24].

Θα παραθέσουμε τώρα κάποια παραδείγματα Ασυμπτωτικής Διάστασης σε γνωστούς χώρους.

Παράδειγμα 3.2 *Έχουμε ότι $asdim\, \mathbb{R}^2 = 2$.*

Η απόδειξη είναι προφανής αν κάποιος δει το παρακάτω σχήμα:



Παράδειγμα 3.3 *Γενικότερα* $asdim\,\mathbb{R}^n = n$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι $asdim\,\mathbb{R}^n \geqslant n$. Έστω ότι δεν ισχύει η πρόταση. Τότε $asdim\,\mathbb{R}^n \leqslant n-1$. Έστω $d > 0$ τότε υπάρχει κάλυμμα $\mathfrak{B} = \{B_i\}$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\forall\, x$ που ανήκει στο X η μπάλα S(x,d) τέμνει το πολύ n σύνολα του καλύμματος.
Έστω I_n ένας n-διάστατος κύβος του R^n με $\{C_i, C_i'\}$, $i = 1, 2, ..., n$ να είναι οι απέναντι κορυφές του, ώστε $dist(C_i, C_i') > 100D + 100d$. Θέτουμε:

$$K_i = \bigcup_{x \in B_i} S(x, e).$$

Όπου $0 < e < d$ για μικρό e. Τότε ισχύουν:

1. $B_i \subset K_i \ \forall\, i \ \in I$,

2. K_i είναι ανοικτά σύνολα για κάθε $i \in I$,

3. $$\bigcup_{i \in I} K_i \supset I_n.$$

Αφού ο I_n είναι συμπαγής υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα από K_i τέτοιο ώστε (αλλάζοντας την αρίθμηση αν χρειάζεται):

$$I_n \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Θέτουμε $H_i = \overline{K_i}$ και έχουμε:

1. $$I_n \subset \bigcup_{i=1}^{m} H_i.$$

2. H_i είναι κλειστά σύνολα για κάθε $i = 1, 2, ..., m$.

Έστω τώρα ότι ένα H_i τέμνει δύο απέναντι πλευρές του I_n συγκεκριμένα τις C_1, C_1'. Τότε θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in H_i$ με $x_1 \in C_1$ και $x_2 \in C_1'$. Άρα $dist(x_1, x_2) > 100D + 100d$. Οπότε $diam H_i > 100D + 100d$. Άτοπο αφού $diam H_i = diam K_i \leqslant diam B_i + 2e < D + 2e$. Άρα κανένα από τα H_i δεν τέμνει δύο από τις απέναντι πλευρές του I_n. Έχουμε όλες τις προυποθέσεις του θεωρήματος κάλυψης του Lebesque. Οπότε υπάρχουν τουλάχιστον $n+1$ σύνολα H_i που έχουν ένα κοινό σημείο έστω το x. Θεωρούμε τότε τα $n+1$ σύνολα B_i που έδωσαν αυτά τα H_i. Τότε για όλα τα παραπάνω H_i έχουμε $x \in H_i \Rightarrow x \in \overline{K_i} \Rightarrow d(x, K_i) = 0 \Rightarrow d(x, B_i) \leqslant e < d$. Οπότε η μπάλα $S(x, d)$ τέμνει αυτά τα $n+1$ σύνολα B_i και καταλήγουμε σε άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι $asdim\, \mathbb{R}^n \geqslant n$.

Χρησιμοποιώντας το "product theorem" και αφού $asdim\, \mathbb{R} = 1$ έχουμε ότι $asdim\, \mathbb{R}^n \leqslant n$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι $asdim\, \mathbb{R}^n = n$. ∎

Παρακάτω δίνουμε ένα ορισμό που είναι πολύ χρήσιμος στην θεωρία τόσο των γραφημάτων ομάδων που θα μελετήσουμε αργότερα όσο και της ασυμπτωτικής διάστασης που μελετάμε εδώ. Είναι το ανάλογο του ομοιομορφισμού της τοπολογικής διάστασης και ενώ φαινομενικά έχει λιγότερες απαιτήσεις από την έννοια του ομοιομορφισμού τελικά διατηρεί όλα τα βασικά στοιχεία των χώρων που μας απασχολούν.

Ορισμός 3.12 *Έστω X και Y δύο μετρικοί χώροι. Έστω συνάρτηση $f : X \to Y$ για την οποία υπάρχει $c > 0$ με τις ιδιότητες:*

1. $\frac{1}{c} d(x, y) - c \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant c d(x, y) + c$

2. $\forall\, y \in Y\ , \exists\, x\ \in X\ :\ d(f(x), y) \leqslant c$

Τότε λέμε ότι η f είναι μια **σχεδόν-ισομετρία (quasi-isometry)** *και ότι οι δύο χώροι είναι* **σχεδόν-ισομετρικοί (quasi-isometric).**

Παρατήρηση 3.3 *Η σχέση της σχεδόν-ισομετρίας είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Αποδεικνύεται εύκολα.(βλέπε [24])

Παρατήρηση 3.4 *Δύο ισομετρικοί χώροι X, Y είναι σχεδόν ισομετρικοί.*

Συνεχίζουμε με ένα θεώρημα που αναδεικνύει την χρησιμότητα της σχεδόν-ισομετρίας.

Πρόταση 3.3 *Δύο σχεδόν ισομετρικοί χώροι έχουν την ίδια ασυμπτωτική διάσταση.*

Απόδειξη. Έστω X ένας μετρικός χώρος με $asdim\, X \leqslant n$ και $f : X \to Y$ μια σχεδόν ισομετρία μεταξύ του X και ενός Y. Έστω $d > 0$ τότε υπάρχει ένα κάλυμμα $\mathfrak{B} = \{B_i\}$ του X τέτοιο ώστε:

1. $$X = \bigcup_{i \in I} B_i,$$
2. $\forall\, i \in I$, $diam(B_i) \leqslant D$ για κάποιο $D > 0$,
3. Κάθε μπάλα $B(x, 4c^2 + 4dc)$ τέμνει το πολύ $n+1$ σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$.

Ορίζουμε ένα αντίστοιχο κάλυμμα $\mathfrak{B}' = \{B_i'\}$ του Y να είναι τα $B_i' = \{y \in Y : \exists\, x \in B_i$ τέτοια ώστε $d(f(x), y) < c\}$. Τότε τα B_i' έχουν τις ιδιότητες:

1. $$Y = \bigcup_{i \in I} B_i',$$
2. $diam(B_i) < cD + 4c$,
3. Κάθε μπάλα $B(y, d)$ τέμνει το πολύ $n + 1$ σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}'$.

Πράγματι έστω $y \in Y$ τότε αφού η f είναι σχεδόν-ισομετρία υπάρχει ένα x στον X τέτοιο ώστε $d(f(x), y) < c$. Έστω B_i ένα σύνολο του καλύμματος με $x \in B_i$ τότε αφού $B_i' = \{y \in Y : \exists\, x \in B_i$ τέτοιο ώστε $d(f(x), y) < c\}$ και προφανώς έχουμε $y \in B_i'$. Οπότε για κάθε $y \in Y$ έχουμε ότι:

$$y \in \bigcup_{i \in I} B_i'.$$

Άρα τα $\{B_i'\}$ καλύπτουν τον Y. Ακόμα έστω y_1 και y_2 δύο στοιχεία του B_i'. Τότε υπάρχουν x_1 και x_2 στο B_i τέτοια ώστε $d(f(x_1), y_1) < c$ και $d(f(x_2), y_2) < c$. Οπότε:

$$d(y_1, y_2) < d(y_1, f(x_1)) + d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_2), y_2) \Rightarrow$$

$$d(y_1), y_2) < c + d(f(x_1), f(x_2)) + c \Rightarrow$$

$$d(y_1), y_2) < c + cd(x_1, x_2) + c + c \Rightarrow$$

$$d(y_1), y_2) < 3c + cD.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $diam(B_i') \leqslant cD + 4c$ για κάθε $i \in I$.
Έστω τώρα η μπάλα $B(y, d)$ στο Y. Θεωρούμε ότι η $B(y, d)$ τέμνει περισσότερα από $n+1$ σύνολα του καλύμματος B_i' τότε υπάρχουν $B_1', B_2', ..., B_{n+1}', B_{n+2}'$ τέτοια ώστε $B(y, d) \bigcap B_i' \neq \emptyset \forall i = 1, 2, ..., n+2$. Αυτό σημαίνει ότι για όλα τα $i \in I$ υπάρχουν $y_i \in B_i'$ με $d(y, y_i) \leqslant d$. Άρα υπάρχει ένα x στον X ώστε για κάθε $i \in I$, με $x_i \in B_i$ να ισχύουν $d(f(x), y) < c$ και
$d(f(x_i), y_i)) < c$. Τότε όμως:

$$d(f(x_i), f(x)) \leqslant d(f(x_i), y_i) + d(y_i, y) + d(y, f(x)) \Rightarrow$$

$$d(f(x_i), f(x) \leqslant c + d + c = 2c + d < 3c + 4d.$$

Αφού η f είναι σχεδόν ισομετρία έχουμε:

$$\frac{1}{c} d(x_i, x) - c \leqslant d(f(x_i), f(x)),\ \forall\, i = 1, 2, ..., n+2 \Rightarrow$$

$$d(x_i, x) \leqslant cd(f(x_i), f(x) + c^2,\ \forall\, i = 1, 2, ..., n+2 \Rightarrow$$

$$d(x_i, x) \leqslant c(3c + 4d) + c^2,\ \forall\, i = 1, 2, ..., n+2 \Rightarrow$$

$$d(x_i, x) \leqslant 4c^2 + 4dc,\ \forall\, i = 1, 2, ..., n+2.$$

Αυτό μας δίνει ότι η μπάλα $B(x, 4c^2 + 4dc)$ περιέχει όλα τα x_i άρα τέμνει τουλάχιστον $n+2$ σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$. Άτοπο. Άρα έχουμε όλες τις ιδιότητες για να πούμε ότι $asdim\, Y \leqslant n$.

Άρα δείξαμε ότι $asdim\, X \leqslant n \Rightarrow asdim\, Y \leqslant n$. Αφού η σχεδόν ισομετρία είναι σχέση ισοδυναμίας έχουμε ότι $asdim\, Y \leqslant n \Rightarrow asdim\, X \leqslant n$. Άρα συνδυάζοντας με την αντιθετο-αντίστροφη της παραπάνω πρότασης έχουμε το ζητούμενο. ■

Η πρόταση 3.3 μας λέει ότι η Ασυμπτωτική Διάσταση μένει αναλλοίωτη κάτω από σχεδόν-ισομετρίες. Δίνει, δε, άμεσες απαντήσεις σε παραδείγματα όπως το παρακάτω.

Παράδειγμα 3.4 *Ένας άπειρος "κύλινδρος (tube)" X με ακτίνα k έχει* $asdim\, X = 1$

Αυτό είναι πραγματικά προφανές αφού ένας τέτοιος κύλινδρος είναι σχεδόν-ισομετρικός με το $\mathbb{R}$ και $asdim\, \mathbb{R} = 1$.

Μια πρόταση όμοια με το "Sum theorem" της τοπολογικής διάστασης ακολουθεί. Η απόδειξη οφείλετε στους Bell και Dranishnikov και βρίσκεται στο [3].

Πρόταση 3.4 *Έστω $X = X' \bigcup X''$ ένας μετρικός χώρος. Τότε:*

$$asdim\, X = max\{asdim\, X', asdim\, X''\}.$$

Τέλος ένα σχετικά εύκολο πόρισμα το οποίο όμως χρησιμοποιείται αρκετά σε αυτήν την εργασία είναι το εξής:

Πόρισμα 3.2 *Έστω X ένας μετρικός χώρος και $Y \subset X$ με την επαγώμενη μετρική. Τότε $asdimY \leqslant asdimX$.*

Απόδειξη. Έστω $d > 0$ και έστω $asdimX = n$ τότε υπάρχει ένα κάλυμμα $\mathfrak{U}$ του X με ομοιόμορφα D-φραγμένα σύνολα με d-βαθμό $\leqslant n+1$. Ο περιορισμός αυτού του καλύμματος στον Y μας δίνει ένα ομοιόμορφα S-φραγμένο κάλυμμα με $S \leqslant D$ και d-βαθμό το πολύ $n + 1$. Άρα $asdim\, Y \leqslant n \Rightarrow asdim\, Y \leqslant asdim\, X$. ∎

4 Cayley Γράφημα - Υπερβολικές Ομάδες

Ορισμός 4.1 *Ένα* **γράφημα (graph)** Γ *αποτελείται από δύο σύνολα:*

1. $\Gamma_0 = V = \{\textit{κορυφές τού } \Gamma\}$
2. $\Gamma_1 = E = \{\textit{ακμές του } \Gamma\}$

και δύο συναρτήσεις:

1. $(o,t) : E \to V \times V$ *με* $l \to (o(l), t(l))$ *όπου* $o(l)$ *ονομάζεται αρχική κορυφή και* $t(l)$ *τελική κορυφή της ακμής* l.
2. $- : E \to E$ *με* $l \to \bar{l}$ *η αντίθετη ακμή της* l.

τέτοια ώστε:

i) $\bar{\bar{l}} = l$

ii) $\bar{l} \neq l$

iii) $o(l) = t(l)$

Μια **γεωμετρική ακμή** *είναι το ζεύγος* $\{l, \bar{l}\}$ *(μια ακμή και η αντίθετή της).*

Ορισμός 4.2 *Αν η ομάδα* G *έχει πεπερασμένο σύνολο γεννητώρων* $S = \{g_1, g_2, ..., g_n\}$ *τότε την καλούμε* **πεπερασμένα παραγόμενη (finitely generated)**. *Αυτό σημαίνει ότι κάθε* g *στην* G *γράφεται στην μορφή* $g = g_{i_1}^{a_1} * g_{i_2}^{a_2} * ... * g_{i_k}^{a_k}$ *με* $a_i \in \mathbb{Z}$ *για όλα τα* $i = 1, 2, .., k$ *και* $g_{i_j} \in S$

Ορισμός 4.3 *Ορίζω μια παράσταση της* G *όπου* S *είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων ώς εξής: Θεωρώ την* $F(S)$ *την ελεύθερη ομάδα που παράγεται από τα στοιχεία του* S. *Έστω* R *υποσύνολο της* $F(S)$. *Λέμε ότι η* $< S|R >$ *είναι παράσταση της* G *αν*

$$G = F(S)/ << R >> .$$

Αν και το σύνολο R *είναι πεπερασμένο λέμε ότι η* G *λέγεται* **πεπερασμένα παριστώμενη (finitely presented)**.

Τα στοιχεία του R λέγονται **σχέσεις** της ομάδας G και είναι ίσα με το ουδέτερο στοιχείο.

Ορισμός 4.4 *(**CAYLEY ΓΡΑΦΗΜΑ**) Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα $G =< S|R >$. Τότε ορίζουμε το Cayley γράφημα της G, ($\Gamma_S(G)$) ώς εξής:*

1. *V(Γ) $= \{g|g \in G\}$ όλα τα στοιχεία της G να είναι οι κορυφές.*
2. *E(Γ) $= \{(g, gs)$και $(\overline{g, gs})$, $g \in G$, $s \in S\}$ το σύνολο όλων των ακμών.*
3. *$o(g, gs) = g$*
4. *$t(g, gs) = gs$*

Κάθε ακμή (g, gs) έχει ετικέτα "s".

Αποδεικνύεται εύκολα ότι κάθε γράφημα ομάδας είναι ένα συνεκτικό γράφημα. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα Cayley γραφημάτων.

Παραδείγματα 4.1

1. *$\mathbb{Z}_6 =< a|a^6 = 1 >$ (βλέπε παρακάτω σχήμα)*
2. *$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} =< a, b|aba^{-1}b^{-1} = e >$. Το Cayley γράφημα του είναι το τετράγωνο πλέγμα που ορίζουν οι οριζόντιες και κάθετες γραμμές που αντιστοιχούν σε σημεία με συντεταγμένες ακέραιους στο Ευκλείδιο επίπεδο.*
3. *Η ομάδα του Klein $V = \{e, a, b, ab\} =< a, b|a^2 = b^2 = e, ab = ba >$.*

Για περισσότερες λεπτομέρειες στα δέντρα βλέπε το [22].

Ορισμός 4.5 *Ένα **μονοπάτι (path)** p στο $\Gamma_S(G)$ είναι μια ακολουθία ακμών $p = (l_1, l_2, ..., l_n)$ τέτοια ώστε $t(l_i) = o(l_{i+1})$ για $i = 1, 2, ..., n-1$. Ορίζουμε $o(p) = o(l_1)$ και $t(p) = t(l_n)$ την αρχή και το τέλος του μονοπατιού p.*

Ορισμός 4.6 *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα $G =< S|R >$ και $\Gamma_S(G)$ το Cayley γράφημα του G. Τότε το $\Gamma_S(G)$ γίνεται μετρικός χώρος ως εξής:*

i) *Κάθε ακμή ταυτίζεται με το διάστημα $[0, 1]$,*

ii) *Για κάθε $x, y \in V$ Ορίζουμε $d(x, y) = \min\{$ μήκος$(p), p$ ένα μονοπάτι με $o(p) = x$ και $t(p) = y\}$.*

Παρατήρηση 4.1 *Η παραπάνω συνάρτηση d είναι μετρική (εύκολο να δειχθεί). Αν περιορίσουμε την d στις κορυφές του $\Gamma_S(G)$ τότε ορίζεται η d_s που καλείται **μετρική λέξης (word metric)**.*

Παρατήρηση 4.2 *Το $\Gamma_S(G)$ είναι γεωδαισιακός μετρικός χώρος.*

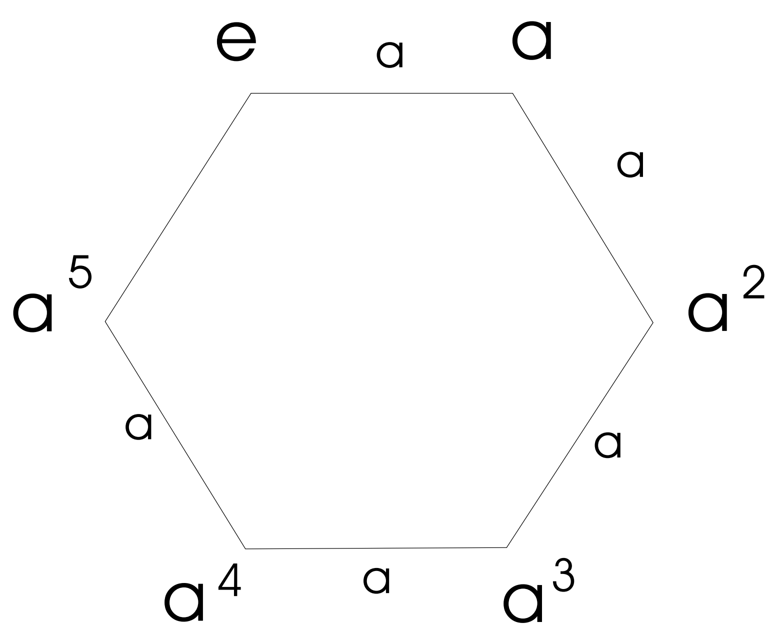


Figure 2: $\mathbb{Z}_6$

Ορισμός 4.7 *Έστω $\Gamma_S(G)$ να είναι το Cayley γράφημα της G και g στοιχείο της G. Ορίζουμε $|g| = d_S(g, e)$ όπου e το ταυτότικό στοιχείο της ομάδας.*

Θα μπορούσαμε να έχουμε ξεκινήσει την κατασκευή της μετρικής της λέξης αλγεβρικά. Δηλαδή:

Ορισμός 4.8 *Έστω G πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα τέτοιο ώστε το σύνολο γεννητόρων της είναι συμμετρικό [4]. Ορίζουμε μια νόρμα στην ομάδα G που αντιστοιχεί στο S θέτοντας $\|w\|_S$ ίσο με το ελάχιστο αριθμό στοιχείων από το S που χρειάζονται για να γράφουμε το w. Αυτή η νόρμα δίνει μια αριστερά πολλαπλασιαστικά αναλλοίωτη μετρική λέξης στο $\Gamma_S(G)$ με $d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S$.*

Παρατήρηση 4.3 *Ένα Cayley γράφημα $\Gamma_S(G)$ αλλάζει "σχήμα" αν αλλάξουμε τους γεννήτορες της ομάδας.*

Παράδειγμα 4.1 $\mathbb{Z} =< x >$ *με* $S_1 = x$ *και* $\mathbb{Z} =< x^2, x^3 >$ *με* $S_2 = \{x^2, x^3\}$ *που δίνει δύο Cayley γραφήματα* $\Gamma_{S_1}(G)$ *και* $\Gamma_{S_2}(G)$.

[4]Συμμετρικό λέγεται το S αν για κάθε $s \in S$ το $s^{-1} \in S$

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι, μια ομάδα με δύο παραστάσεις έχει συνήθως διαφορετικά Cayley γραφήματα, τα οποία είναι όμως πάντα σχεδόν ισομετρικά.

Λήμμα 4.1 *Αν $\Gamma_S(G)$ είναι το Cayley γράφημα μίας ομάδας με d την αντίστοιχη μετρική και g στην G έχουμε ότι $d(h, h*g) \leqslant |g|$.*

Απόδειξη. Έστω $|g| = n$ οπότε $g = s_1 * s_2 * ... * s_n$ όπου s_i είναι γεννήτορες της G. Τότε $h*g = h*s_1*s_2*...*s_n$ που δίνει $d(h, hg) \leqslant d(h, s_1*h)+d(s_1*h, s_2*s_1*h)+...+d(s_1*...*s_{n-1}*h, s_1*...*s_n*h) = 1+1+...+1 = n = |g|$ και έχουμε το λήμμα. ■

Θεώρημα 4.1 *Έστω G να είναι μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα με $G =< S_1|R_1 >$ και $G =< S_2|R_2 >$ δύο παραστάσεις της όπου S_1 και S_2 δύο διαφορετικά πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων της. Τότε $\Gamma_{S_1}(G)$ είναι σχεδόν ισομετρικό με το $\Gamma_{S_2}(G)$.*

Απόδειξη. Έστω S_1=$\{a_1, a_2, ...a_n\}$ και S_2=$\{b_1, b_2, ...b_k\}$.
Θέτουμε $l = \max\{|a_i|_{S_2} : a_i \in S_1\}$ και $m = \max\{|b_i|_{S_1} : b_i \in S_2\}$.
Θα δείξουμε ότι η $id : \Gamma_{S_1}(G) \to \Gamma_{S_2}(G)$ είναι $l+m$-**bilipsitz** δηλαδή ότι $\frac{1}{l+m}\, d_{S_1}(g_1, g_2) \leqslant d_{S_2}(g_1, g_2) \leqslant (l+m)\, d_{S_1}(g_1, g_2)$. Η δεύτερη ιδιότητα της σχεδόν ισομετρίας αποδεικνύεται εύκολα για κάθε $c > 0$ γιατί για κάθε $g \in \Gamma_{S_2}(G)$ το ίδιο το g ανήκει στο $\Gamma_{S_1}(G)$ με $d(f(g), g) = d(g, g) = 0 < c$.
Έστω g_1 και g_2 δύο στοιχεία της G. Έστω δε, $d(g_1, g_2)_{S_2} = k$ τότε υπάρχουν $b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_k}$ στο S_2 ώστε $g_2 = b_{i_1} * b_{i_2} * ... * b_{i_k} * g_1$. Αυτό σημαίνει ότι στο $\Gamma_{S_1}(G)$ ισχύει:

$$d(g_1, g_2) \leqslant d(g_1, b_{i_1}*g_1)+d(b_{i_1}*g_1, b_{i_2}*b_{i_1}*g_1)+...+d(b_{i_{k-1}}*...*b_{i_1}*g_1, g_2).$$

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι:

$$d(g_1, b_{i_1}*g_1) \leqslant |b_{i_1}|, d(b_{i_1}*g_1, b_{i_2}*b_{i_1}*g_1) \leqslant |b_{i_2}|, ..., d(b_{i_{k-1}}*...*b_{i_1}*g_1, g_2) \leqslant |b_{i_k}|.$$

Οπότε είναι προφανές ότι στο $\Gamma_{S_1}(G)$, ισχύει:

$$d_{S_1}(g_1, g_2) \leqslant |b_{i_1}| + |b_{i_2}| + ... + |b_{i_k}| \leqslant m*k = m*d_{S_2}(g_1, g_2)$$

αφού $|b_{i_j}| \leqslant m$ για κάθε $j = 1, 2, .., k$. Όμοια έχουμε ότι:

$$d_{S_2}(g_1, g_2) \leqslant l*d_{S_1}(g_1, g_2).$$

Άρα καταλήγουμε στο:

$$d_{S_2}(g_1, g_2) \leqslant (l+m)*d_{S_1}(g_1, g_2) \;\text{και}$$

$$d_{S_1}(g_1, g_2) \leqslant (l+m) * d_{S_2}(g_1, g_2)$$

που δίνει την ζητούμενη ανισότητα. ■

Ένα από τα βασικά αποτελέσματα αυτής της εργασίας χρησιμοποιεί van Kampen διαγράμματα (βλέπε [22] κεφάλαιο V σελ. 236 -240) οπότε θα δώσουμε τον ορισμό των διαγραμμάτων αυτών και μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα τους.

Ορισμός 4.9 *Ένα van Kampen διάγραμμα $\mathfrak{D}$ για μια λέξη w στην G που παριστά το ουδέτερο είναι ένα πεπερασμένο, επίπεδο, συσταλτό, combinatorial 2-complex το οποίου τα 1-κελιά έχουν κατεύθυνση και έχουν για ετικέτες γεννήτορες της G, έτσι ώστε οι ετικέτες των συνόρων καθενός από τα 2-κελιά είναι κυκλικά συζυγείς σχέσεων ή αντιστρόφων των σχέσεων της ομάδας. Επιπλέον η ετικέτα του συνόρου του $\mathfrak{D}$ είναι η w αν διαβαστεί (αντίστροφα των δεικτών του ρολογιού) από ένα βασικό σημείο στο $\partial\mathfrak{D}$.*

Παρατήρηση 4.4 *Αν θεωρήσουμε $\mathfrak{D}^{(1)}$ να είναι το 1-skeleton του διαγράμματος van Kampen που αντιστοιχεί στην w ορίζεται η απεικόνιση $f : \mathfrak{D}^{(1)} \to G$ που διατηρεί της ετικέτες ώστε το σύνορο του van Kampen διαγράμματος να έχει την w σαν εικόνα.*

Παρατήρηση 4.5 *Για αυτήν την συνάρτηση f ισχύει $d(x,y) \geqslant d(f(x), f(y))$ για κάθε x, y στο van Kampen διάγραμμα όπου $d(x,y)$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο διάγραμμα και $d(f(x), f(y))$ η απόσταση των εικόνων τους στο Cayley γράφημα.*

Τα διαγράμματα αυτά ανακαλύφθηκαν από τον R. van Kampen το 1933, αλλά ο ίδιος δεν έκανε μεγάλη χρήση αυτών. Η όλη ιδέα παραμελήθηκε για τουλάχιστον τριάντα χρόνια. Ανακαλύφθηκαν ξανά το 1966 και χρησιμοποιήθηκαν από τους R.C. Lyndon και C.M.Weinbaum στην θεωρία μικρής διαγραφής (small cancelation theory).
Ένας άλλος πολύ ενδιαφέρον ορισμός που θα χρησιμοποιήσουμε στην εργασία αυτή είναι ο ορισμός του "βασικά κάτι". Λέμε ότι μια ομάδα G είναι "βασικά κάτι" (ελεύθερη, υπερβολική, αβελιανή κτλ.) αν και μόνο αν υπάρχει μια πεπερασμένου δείκτη υποομάδα της H η οποία είναι αυτό το "κάτι" (ελεύθερη, υπερβολική, αβελιανή κτλ.) Διατυπώνουμε πιο αυστηρά τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.10 *Μια ομάδα G είναι* **βασικά ελεύθερη (virtually free)** *αν υπάρχει υποομάδα της H πεπερασμένου δείκτη που είναι ελεύθερη.*

Θα μιλήσουμε τώρα για μια σπουδαία κατηγορία ομάδων την οποία μελέτησε πρώτος ο Gromov στην μεγάλη, εργασία του με τίτλο "Hyperbolic Groups". Η κατηγορία αυτών των ομάδων, οι οποίες είναι συνήθως πεπερασμένα παραγόμενες περιγράφεται πιο πολύ με γεωμετρικούς όρους κάνοντας χρήση των Cayley γραφημάτων των ομάδων.

Ορισμός 4.11 *Σε ένα χώρο X, δεδομένου ενός* **βασικού σημείου (basic point)** $w \in X$, *ορίζουμε ένα* **εσωτερικό γινόμενο (inner product)** *στον X με:*

$$(x|y)_w = \frac{1}{2}(d(x,w) + d(y,w) - d(x,y)).$$

Αν υπάρχει μια σταθερά $\delta \geqslant 0$ τέτοια ώστε:

$$\forall x, y, z \in X, (x|y)_w \geqslant \min\{(x|z)_w, (y|z)_w\} - \delta$$

τότε λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι **δ-υπερβολικό (δ-hyperbolic)**.

Παρατήρηση 4.6 *Θεωρώντας $\delta = 0$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε δέντρο (ακόμα και ένα $\mathbb{R}$-δέντρο) είναι 0-υπερβολικό.*

Παρατήρηση 4.7 *Αν το εσωτερικό γινόμενο είναι δ-υπερβολικό με βασικό σημείο το x, τότε είναι 2δ-υπερβολικό με βάση οποιοδήποτε άλλο βασικό σημείο.*

Ένας ακόμα ορισμός υπερβολικού χώρου προέρχεται από διάφορες ιδιότητες που έχουν τα τρίγωνα σε τέτοιους χώρους. Συγκεκριμένα ο επόμενος ορισμός αναφέρεται σε "αδύνατα (slim)" τρίγωνα.

Ορισμός 4.12 *Δεδομένου τριών σημείων x, y, z στον χώρο X, λέμε ότι το* **τρίγωνο** *xyz των γεωδαισιακών που ενώνουν αυτά τα σημεία είναι* **δ-αδύνατο (δ-slim)** *αν για κάθε σημείο w στο $[xy]$ έχουμε ότι:*

$$min(d(w,[xz]), d(w[yz])) \leqslant \delta$$

(και κατ'αντιστοιχία για τις άλλες πλευρές). Λέμε ότι τα τρίγωνα είναι **αδύνατα (slim)** *στον X αν υπάρχει μια σταθερά δ τέτοια ώστε όλα τα τρίγωνα του X είναι δ-αδύνατα.*

Υπενθυμίζουμε ότι με $[xy]$ συμβολίζουμε την γεωδαισιακή που συνδέει τα x και y.

Παρατήρηση 4.8 *Για ένα γεωδαισιακό μετρικό χώρο τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Τα τρίγωνα είναι δ-αδύνατα για κάποιο $\delta > 0$.*

2. *Το εσωτερικό γινόμενο είναι δ-υπερβολικό για κάποιο $\delta > 0$.*

Μια σύντομη απόδειξη του παραπάνω μπορεί κανείς να βρει στο [26]. Η περιπτώσεις που μας απασχολούν εδώ είναι αυτές για τις οποίες ο γεωδαισιακός μετρικός χώρος που εξετάζουμε είναι το Cayley γράφημα $\Gamma_S(G)$ μιας ομάδας G με βάση ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S.

Ορισμός 4.13 *(**ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ**) Λέμε ότι μια ομάδα G είναι* **υπερβολική)** *αν έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S τέτοιο ώστε το αντίστοιχο Cayley γράφημα $\Gamma_S(G)$ είναι ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος με δ-υπερβολικό εσωτερικό γινόμενο, για κάποιο $\delta \geqslant 0$.*

Ένας πιο γεωμετρικός τρόπος για να βλέπει κανείς τις υπερβολικές ομάδες είναι με την βοήθεια των ισοπεριμετρικών ανισοτήτων (isoperimetric inequalities) [10].

Ορισμός 4.14 *Έστω $< S|R >$ μια πεπερασμένη παράσταση της ομάδας G. Αν w είναι μια ελεύθερα ανηγμένη λέξη στην ελεύθερη ομάδα $F(S)$ μήκους $l(w)$(όπου $F(S)$ είναι ελεύθερη στο S) και $\overline{w} = 1$ στην G, τότε υπάρχουν λέξεις $p_i \in F(S)$, σχέσεις $r_i \in R$ και $\epsilon = \pm 1$ τέτοια ώστε:*

$$w = \prod_{i=1}^{N} p_i r_i^{\epsilon_i} p_i^{-1} \text{ στην } F(S)$$

Αν υπάρχει μια σταθερά K τέτοια ώστε για όλες αυτές τις λέξεις w, να ισχύει $N < K \cdot l(w)$, λέμε ότι η G ικανοποιεί μια **γραμμική ισοπεριμετρική ανισότητα (linear isoperimetric inequality)**.

Για περισσότερες λεπτομέρειες και πληροφορίες σχετικά με τον ορισμό καθώς και μερικά παραδείγματα βλέπε [26]. Στο ίδιο βιβλίο αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 4.2 *Μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα που ικανοποιεί μια γραμμική ισοπεριμετρική ανισότητα είναι υπερβολική.*

Παρατήρηση 4.9 *Αν κάποια πεπερασμένη παράσταση της ομάδας G ικανοποιεί μια γραμμική ισοπεριμετρική ανισότητα, τότε όλες οι παραστάσεις της G κάνουν το ίδιο.*

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα με χρήση μετασχηματισμών Tietze και αποδεικνύει ότι ο ορισμός δεν εξαρτάται από το σύνολο γεννητόρων. Επιπλέον ο Alonso έδειξε ότι ο τύπος των ισοπεριμετρικών ανισοτήτων που ικανοποιεί μια ομάδα μένει αναλλοίωτος κάτω από σχεδόν-ισομετρίες. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα 4.1 *Αν G είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη υπερβολική ομάδα και υπάρχει $f : G \to H$, σχεδόν ισομετρία τότε η H είναι υπερβολική ομάδα.*

Παρατήρηση 4.10 *Μια ελεύθερη ομάδα ικανοποιεί μια μηδενική ισοπεριμετρική ανισότητα με σύνολο γεννητόρων μια ελεύθερη βάση. Αν αλλάξουμε την βάση μπορεί να μην ικανοποιεί μια μηδενική ισοπεριμετρική ανισότητα, όμως ικανοποιεί το πολύ μια γραμμική ισοπεριμετρική ανισότητα οπότε όλες οι ελεύθερες ομάδες είναι υπερβολικές.*

Ορισμός 4.15 *Αν X είναι υπερβολικός γεωδαισιακός μετρικός χώρος (π.χ. Cayley γράφημα υπερβολικής ομάδας) και $x_0 \in X$ τότε το σύνορο ∂X ορίζεται ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των γεωδαισιακών ακτίνων που ξεκινούν από ένα βασικό σημείο το x_0. Ορίζουμε δύο ακτίνες να είναι ισοδύναμες αν η μια περιέχεται σε μια πεπερασμένη γειτονιά Hausdorf της άλλης.*

Ορίζω στο σύνορο το παρακάτω εσωτερικό γινόμενο:

Ορισμός 4.16 *Έστω $\tilde{x}, \tilde{y} \in \partial X$ και z το βασικό σημείο του υπερβολικού χώρου. Ορίζω εσωτερικό γινόμενο: $(\tilde{x}|\tilde{y})_z = \inf\{\liminf (x_i|y_i)_z\}$ όπου το $infimum$ λαμβάνεται για όλες τις γεωδαισιακές που αντιστοιχούν στα x, y και x_i, y_i τα σημεία πάνω σε κάθε γεωδαισιακή.*

Ορισμός 4.17 *Τέλος μια μετρική d του συνόρου ∂X του X λέγεται "**visual**" αν υπάρχουν $x_0 \in X, a > 1$ και $c_1, c_2 > 0$ τέτοια ώστε*

$$c_1 a^{-(z|w)_{x_0}} \leqslant d(z,w) \leqslant c_2 a^{-(z|w)_{x_0}}$$

για κάθε z, w στο ∂X.

Παρατήρηση 4.11 *Το σύνορο κάθε υπερβολικού χώρου X μπορεί να δεχτεί μια "visual" μετρική , ως εξής: Αν $x, y \in \partial X, w \in X, \varepsilon > 0$, τότε*

$$d_{\partial X, w, \varepsilon}(x,y) := d_\varepsilon(x,y) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} e^{-\varepsilon(x_{i-1}|x_i)_w}\},$$

όπου το infimum λαμβάνεται για όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$ στο ∂X, βλέπε [18],[5].

Στην τελευταία παράγραφο ένα κεντρικό θεώρημα που παρουσιάζουμε χρησιμοποιεί "visual" υπερβολικούς χώρους οπότε δίνουμε εδώ τον ορισμό.

Ορισμός 4.18 *Ένας υπερβολικός χώρος X καλείται* "**visual**" *αν για κάποιο $x_0 \in X$ υπάρχει ένα $D > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια γεωδαισιακή ακτίνα r από το x_0 στο ∂X τέτοια ώστε $d(x, r) \leqslant D$.*

Παρατήρηση 4.12 *Είναι εύκολο να δούμε ότι αν ο X είναι "visual" ως προς ένα βασικό σημείο x_0 τότε είναι "visual" ως προς όλα τα σημεία (βλέπε [5]).*

Φυσικά μπορεί να βρει κανείς στην βιβλιογραφία πιο πλήρης ορισμούς της έννοιας "visual" και του "συνόρου" ενός υπερβολικού χώρου. Για τον σκοπό αυτής της εργασίας οι παραπάνω ορισμοί είναι αρκετοί.

5 Βασικά Αποτελέσματα

Ξεκινάμε αυτήν την παράγραφο με ένα σχετικά εύκολο αλλά βασικό πόρισμα.

Πόρισμα 5.1 *Αν G είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα τότε $asdim\, G$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του συνόλου γεννητόρων της δηλαδή είναι αλγεβρική ιδιότητα.*

Απόδειξη. Έστω $G =< S_1|R_1 >$ και $G =< S_2|R_2 >$ δύο παραστάσεις της G. Τότε από το θεώρημα 4.1 τα Cayley γραφήματα που προκύπτουν είναι σχεδόν ισομετρικά. Αφού η ασυμπτωτική διάσταση είναι ίδια για σχεδόν ισομετρικά γραφήματα έχουμε το ζητούμενο. ■

Σε προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αν X είναι ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος τότε $asdim\, X = 0$ μας λέει ότι X είναι φραγμένος. Όμοια δείχνουμε ότι:

Πρόταση 5.1 *Αν G είναι πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα. Τότε $asdim\, G = 0$ αν και μόνο αν G είναι πεπερασμένη.*

Ο J.Smith ([27]) κατέταξε όλες τις αριθμήσιμες ομάδες που έχουν κάποια αριστερά αναλλοίωτη κανονική μετρική και ασυμπτωτική διάσταση 0 οπότε το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει σαν απλό πόρισμα μέσα από την θεωρία του. Ένα βασικό θεώρημα αυτής της θεωρίας είναι:

Θεώρημα 5.1 *Έστω G μια αριθμήσιμη ομάδα. Τότε $asdimG = 0$ αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της G είναι πεπερασμένη.*

Ένα πρώτο παράδειγμα υπολογισμού της ασυμπτωτικής διάστασης είναι τα δέντρα τα οποία είναι 0-υπερβολικοί χώροι. Ειδικότερα:

Πρόταση 5.2 *Έστω ένα δέντρο (ακόμα και $\mathbb{R}$-δέντρο) τότε η ασυμπτωτική διάσταση του είναι $\leqslant 1$.*

Απόδειξη. Έστω e η αρχή του δέντρου και $d > 0$. Ορίζουμε $A_k = \{x \in T : kd \leqslant d(x, e) < (k + 1)d$. Τότε προφανώς:

$$T = (\bigcup_{k\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma} A_k)\bigcup(\bigcup_{k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma} A_k.)$$

Θα δείξουμε ότι το A_k, k άρτιος και A_k, k περιττός είναι d-αραιά και D-φραγμένα (για κάποιο $D > 0$) οπότε σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό της ασυμπτωτικής διάστασης θα έχουμε ότι $asdimT \leqslant 1$. Είναι προφανές ότι για $k \neq l$ (k και l άρτιος) ισχύει ότι $d(A_k, A_l) > d$ (το ίδιο ισχύει αν είναι περιττά). Αφού τα A_k δεν είναι ομοιόμορφα D-φραγμένα θα τα διασπάσουμε σε ενώσεις από φραγμένα και d-αραιά σύνολα. Ορίζουμε μια σχέση A_k με $x \sim y \Longleftrightarrow (x|y) \geqslant (k-\frac{1}{2})d$ όπου $(x|y) = (x|y)_e = \frac{1}{2}(d(x,e)+d(y,e)-d(x,y))$ το οποίο είναι το γινόμενο Gromov με το e σαν βασικό σημείο. Αφού κάθε δέντρο είναι 0-υπερβολικός χώρος έχουμε ότι $(x|z) \geqslant min\{(x|y),(y|z)\}$. Αυτή η ιδιότητα αποδεικνύει εύκολα ότι η παραπάνω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Κάθε κλάση ισοδυναμίας στο A_k είναι $3d$-φραγμένη γιατί έστω x, y είναι στην ίδια κλάση ισοδυναμίας τότε:

$$d(x,y) = d(x,e) + d(y,e) - 2(x|y) \leqslant 2(k+1)d - 2(k - \frac{1}{2})d = 3d.$$

Δύο διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας είναι d-διακριτές αφού αν $x \nsim y$ τότε:

$$d(x,y) = d(x,e) + d(y,e) - 2(x|y) \geqslant 2kd - 2(k - \frac{1}{2})d = d.$$

Άρα έχουμε ότι κάθε A_k είναι ένωση από d-αραιά, $3d$-φραγμένα σύνολα, τις κλάσεις ισοδυναμίας τους. Άρα δείξαμε ότι $asdim\, T \leqslant 1$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Με μικρή μετατροπή της παραπάνω απόδειξης παίρνουμε:

Πρόταση 5.3 *Κάθε δ-υπερβολικός μετρικός χώρος με φραγμένο ανάπτυγμα έχει πεπερασμένη ασυμπτωτική διάσταση. Οπότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενη δ-υπερβολική ομάδα έχει πεπερασμένη ασυμπτωτική διάσταση.*

Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε: ([24], [19], [5])

Η θεωρία της ασυμπτωτικής διάστασης έχει δώσει μερικά όμορφα θεωρήματα εμφύτευσης ορισμένων χώρων των οποίων η ασυμπτωτική διάσταση είναι γνωστή. Στο [13] ο A.Dranishnikov έδειξε ότι κάθε γνήσιος μετρικός χώρος X με $asdimX \leqslant n$ δέχεται μια καθολική εμφύτευση στο καρτεσιανό γινόμενο $n+1$ τοπικά πεπερασμένων $\mathbb{R}$-δέντρων. Αργότερα ο ίδιος με την βοήθεια του V.Schroeder στο [16] έδειξαν ότι το υπερβολικό επίπεδο δέχεται μια bi-Lipschitz εμφύτευση στο γινόμενο δύο **δυαδικών δέντρων (binary trees)**.
Αργότερα οι S.Buyalo και V.Schroeder στο [9] χρησιμοποιώντας ίδιες τεχνικές και κάποια αποτελέσματα του S.Buyalo [6] έδειξαν ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υπερβολική ομάδα G μπορεί να εμφυτευτεί με μια σχεδόν-ισομετρία στο καρτεσιανό γινόμενο n "δυαδικών δέντρων", όπου n είναι η τοπολογική διάσταση του συνόρου στο άπειρο του $X(n = dim\, \partial X)$ και ότι αυτό το n είναι το ελάχιστο δυνατό.
Ακόμα ο J.Światkowski απέδειξε ότι $asdim\, G \geqslant dim\, \partial G + 1$ για υπερβολικές ομάδες. Γενικότερα έχουμε το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 5.2 *Αν G είναι μια υπερβολική ομάδα τότε $asdim\, G = dim\, \partial G + 1$.*

Η ισότητα αυτή για τις υπερβολικές ομάδες αποτελούσε μια από τις εικασίες του Gromov και απεδείχθη τελικά σαν πόρισμα από τους S.Buyalo και N.Lebedeva σε ένα άρθρο που δημοσιεύθηκε αυτό το καλοκαίρι(2005). Το θεώρημα τους είναι το εξής:

Θεώρημα 5.3 *Έστω X ένας "cobounded", υπερβολικός, γνήσιος, γεωδαισιακός χώρος X τότε:*

$$asdim\, X = dim\, \partial X + 1$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

Ορισμός 5.1 *Ένα μετρικός χώρος X είναι* **cobounded** *αν υπάρχει ένα φραγμένο υποσύνολο $A \subset X$ τέτοιο ώστε η τροχιά του A κάτω από την ομάδα ισομετριών του X καλύπτει όλο το X.*

Στην διάρκεια της συγγραφής της εργασίας αποδείξαμε την σαφώς ασθενέστερη ιδιότητα:

Πρόταση 5.4 *Έστω X ένας "visual" υπερβολικός γεωδαισιακός χώρος. Τότε $asdim\, X \geqslant dim\, \partial X$.*

Απόδειξη.

Έστω X ένας υπερβολικός χώρος με $asdim\, X = n$. Σταθεροποιούμε ένα $d > 0$. Τότε υπάρχει ένα κάλυμμα $\mathfrak{B} = \{B_i\}$, i στο I, του X τέτοιο ώστε:

a) $diam(B_i) \leqslant D$ για όλα τα $i \in I$ και για κάποιο σταθερό $D > 0$,

b) Κάθε μπάλα $S(x, d)$ με $x \in X$ τέμνει το πολύ $n + 1$ σύνολα του καλύμματος $\mathfrak{B}$.

Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Διαλέγω $R > 0$ τέτοιο ώστε :

$$\log_2 \frac{2c_1}{\epsilon} + \frac{D}{2} < R \iff$$

$$\frac{D}{2} - R < -\log_2 \frac{2c_1}{\epsilon} \iff$$

$$2^{(\frac{D}{2}-R)} < 2^{-\log_2 \frac{2c_1}{\epsilon}} \iff$$

$$2^{(\frac{D}{2}-R)} < 2^{\log_2 \frac{\epsilon}{2c_1}} \iff$$

$$2^{(\frac{D}{2}-R)} < \frac{\epsilon}{2c_1} \iff$$
$$c_1 2^{(\frac{D}{2}-R)} < \frac{\epsilon}{2}(1)$$

Έστω x_0 ένα βασικό σημείο στον χώρο X. Θεωρούμε τον κύκλο $C = C(x_0, R) = \{x \in X : d(x, x_0) = R\}$. Ορίζω τα B_i που τέμνουν αυτόν τον κύκλο. Άρα υπάρχει ένα $J \subset I$ τέτοιο ώστε τα B_i i στο J είναι κάλυμμα του C.
Ορίζουμε τώρα $\widetilde{B}_i$ i στο J να είναι τα σύνολα του συνόρου ∂X τέτοια ώστε: $\widetilde{x} \in \widetilde{B}_i$ αν μια από τις γεωδαισιακές που αντιστοιχεί στο $\widetilde{x}$ τέμνει τον C στο x που ανήκει στο B_i.
Είναι πιθανό κάποιο $\widetilde{x}$ να ανήκει σε διάφορα $\widetilde{B}_i$, αφού το $\widetilde{x}$ μπορεί να αντιστοιχεί σε διάφορες γεωδαισιακές που μπορεί να τέμνουν τον C σε διαφορετικά x τα οποία ανήκουν σε διαφορετικά B_i. Αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα αφού χωρίς βλάβη της γενικότητας τοποθετούμε το $\widetilde{x}$ σε ένα $\widetilde{B}_i$ και σε κανένα άλλο.
Προφανώς το $\{\widetilde{B}_i\}$, i στο J, καλύπτει ολόκληρο το σύνορο ∂X εκ κατασκευής. Ακόμη, έστω $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{B}_i$ τότε αφού ο χώρος είναι "visual" έχουμε ότι:

$$d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant c_1 2^{-(x,y)_{x_0}}.(2)$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$(x,y)_{x_0} = \frac{1}{2}(d(x,x_0) + d(y,x_0) - d(x,y)) \Rightarrow$$
$$(x,y)_{x_0} = \frac{1}{2}(R + R - d(x,y) \Rightarrow$$
$$(x,y)_{x_0} = R - \frac{1}{2}d(x,y) \Rightarrow$$
$$(x,y)_{x_0} \geqslant R - \frac{1}{2}D \Rightarrow$$
$$-(x,y)_{x_0} \leqslant \frac{D}{2} - R \Rightarrow$$
$$2^{-(x,y)_{x_0}} \leqslant 2^{(\frac{D}{2}-R)} \Rightarrow$$
$$c_1 2^{-(x,y)_{x_0}} \leqslant c_1 2^{(\frac{D}{2}-R)} \Rightarrow$$
$$c_1 2^{-(x,y)_{x_0}} \leqslant \frac{\epsilon}{2} \ (\lambda \acute{o} \gamma \omega \ \tau \omega \nu \ (1) \ \kappa \alpha \iota (2)) \Rightarrow$$
$$d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \leqslant \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow$$
$$diam(\widetilde{B}_i) \leqslant \frac{\epsilon}{2} \ \forall i \in J$$

Οπότε όλα τα $\widetilde{B}_i$ είναι $\frac{\epsilon}{2}$-φραγμένα. Ορίζουμε τότε $\epsilon_0 < min\{\frac{\epsilon}{10}, \frac{c_1 2^{\frac{d}{2}-R}}{2}\}$. Και θεωρούμε:

$$B_i' = \bigcup_{\widetilde{x} \in \widetilde{B}_i} S(\widetilde{x}, \epsilon_0) \; \forall i \in J.$$

Προφανώς $diam(B_i') \leqslant \frac{\epsilon}{2} + 2\epsilon_0 < \epsilon$. Άρα όλα τα B_i' είναι ϵ-φραγμένα.

Επίσης έχουμε ότι η τάξη των B_i' είναι $\leqslant n$. Πράγματι, έστω ότι η τάξη των B_i' ήταν $\geqslant n+1$. Τότε θα υπήρχαν τουλάχιστον $n+2$ σύνολα του καλύμματος με τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $\widetilde{x} \in \partial X$ τέτοιο ώστε $\widetilde{x} \in B_i'$ για $i = 1, 2, ..., n+2$ (αλλάζοντας την αρίθμηση των B_i' χωρίς βλάβη της γενικότητας). Άρα έχουμε ότι $d(\widetilde{x}, \widetilde{B}_i) \leqslant \epsilon_0$ για όλα τα $i = 1, 2, 3, ..., n+1$. Αυτό μας λέει ότι υπάρχει $\widetilde{y}_i \in \widetilde{B}_i$ τέτοιο ώστε:

$$d(\widetilde{x}, \widetilde{y}_i) < 2\epsilon_0.$$

Ορίζουμε x να είναι το σημείο όπου ο C και η γεωδαισιακή που αντιστοιχεί στο $\widetilde{x}$ συμπίπτουν και y_i τα σημεία όπου η C συναντά τις γεωδαισιακές των $\widetilde{y}_i$.

Αφού η μετρική είναι "visual" έχουμε ότι για $i = 1, 2, ..., n+2$:

$$c_1 2^{-(x,y_i)_{x_0}} \leqslant d(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \Longleftrightarrow$$

$$c_1 2^{-(x,y_i)_{x_0}} \leqslant 2\epsilon_0 \Longleftrightarrow$$

$$c_1 2^{-(x,y_i)_{x_0}} \leqslant 2\frac{c_1 2^{\frac{d}{2}-R}}{2} \Longleftrightarrow$$

$$c_1 2^{-(x,y_i)_{x_0}} \leqslant c_1 2^{\frac{d}{2}-R} \Longleftrightarrow$$

$$-(x, y_i)_{x_0} \leqslant \frac{d}{2} - R \Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(y_i, x_0) - d(x, y_i)) \leqslant \frac{d}{2} - R \Longleftrightarrow$$

$$-R + \frac{1}{2}d(x, y_i) \leqslant \frac{d}{2} - R \Longleftrightarrow$$

$$d(x, y_i) \leqslant d$$

Αυτό σημαίνει ότι η μπάλα $S(x, d)$ περιέχει τα y_i για $i = 1, 2, ..., n+2$. Άρα τέμνει όλα τα B_i $i = 1, 2, ..., n+2$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί $asdim\, X = n$. Οπότε έχουμε ότι η τάξη των B_i' είναι $< n+1$. Αυτό αποδεικνύει ότι για οσοδήποτε μικρό άνοιγμα ϵ κατασκευάζουμε κάλυμμα του ∂X με $diam\,(B_i') < \epsilon$ και τάξη $\leqslant n$. Αφού το σύνορο ∂X είναι συμπαγής χώρος έχουμε ότι $dim\, \partial X \leqslant n \Rightarrow dim\, \partial X \leqslant asdim\, X$. $\blacksquare$

Κατά την διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας αποδείξαμε ότι η σχέση του θεωρήματος 5.3 δεν ισχύει για υπερβολικούς χώρους γενικά. Ειδικότερα κατασκευάσαμε έναν χώρο που αποτελεί παράδειγμα ενός "visual", υπερβολικού χώρου X με φραγμένη γεωμετρία για τον οποίο ισχύει $asdim\, X = 2$ και $dim\, \partial X = 0$. Άρα η εικασία του Gromov δεν ισχύει για αυτόν τον χώρο. Ονομάσαμε αυτόν τον χώρο "χτενοχώρο" λόγω του σχήματος του.

Ο Χτενόχωρος.

Έστω $\mathbb{H}^2$ να είναι το υπερβολικό επίπεδο και έστω $a_1, a_2, ...$ να είναι γεωδαισιακές ακτίνες που ξεκινούν από ένα σημείο x_0 και να επεκτείνονται προς το άπειρο έτσι ώστε η γωνία μεταξύ a_n, a_{n+1} να είναι $\frac{\pi}{2^n}$.

Έστω $S(a_n, a_{n+1})$ να είναι ο τομέας που ορίζουν οι ακτίνες a_n, a_{n+1}. Με άλλα λόγια $S(a_n, a_{n+1})$ είναι η κλειστή θήκη των a_n, a_{n+1}.

Αφού οι γεωδαισιακές αποκλίνουν στο $\mathbb{H}^2$ υπάρχει ένα $x \in S(a_n, a_{n+1})$ τέτοιο ώστε η μπάλα ακτίνας n και κέντρου x, $B(x, n)$ που περιέχεται στον τομέα $S(a_n, a_{n+1})$. Έστω N_n να είναι τέτοια ώστε $B(x, n) \subset B(x_0, N_n)$. Έστω:

$$S(a_n, a_{n+1}, N_n) = S(a_n, a_{n+1}) \cap B(x_0, N_n)$$

Καλούμε K_n το πάνω τόξο του $S(a_n, a_{n+1}, N_n)$, δηλαδή:

$$K_n = S(a_n, a_{n+1}, N_n) \cap \partial B(x_0, N_n)$$

Υποδιαιρούμε το K_n σε μικρά κομμάτια μήκους μεταξύ 1/2 και 1 σημειώνοντας τις κορυφές. Μετά θεωρούμε τις γεωδαισιακές ακτίνες που ξεκινούν από το x_0 προς κάθε κορυφή και τις επεκτείνουμε προς το άπειρο.

Οπότε κατασκευάζουμε το "Χτενόχωρο" που είναι η ένωση όλων των $S(a_n, a_{n+1}, N_n)$ μαζί με τις παραπάνω ακτίνες και είναι ο εξής:

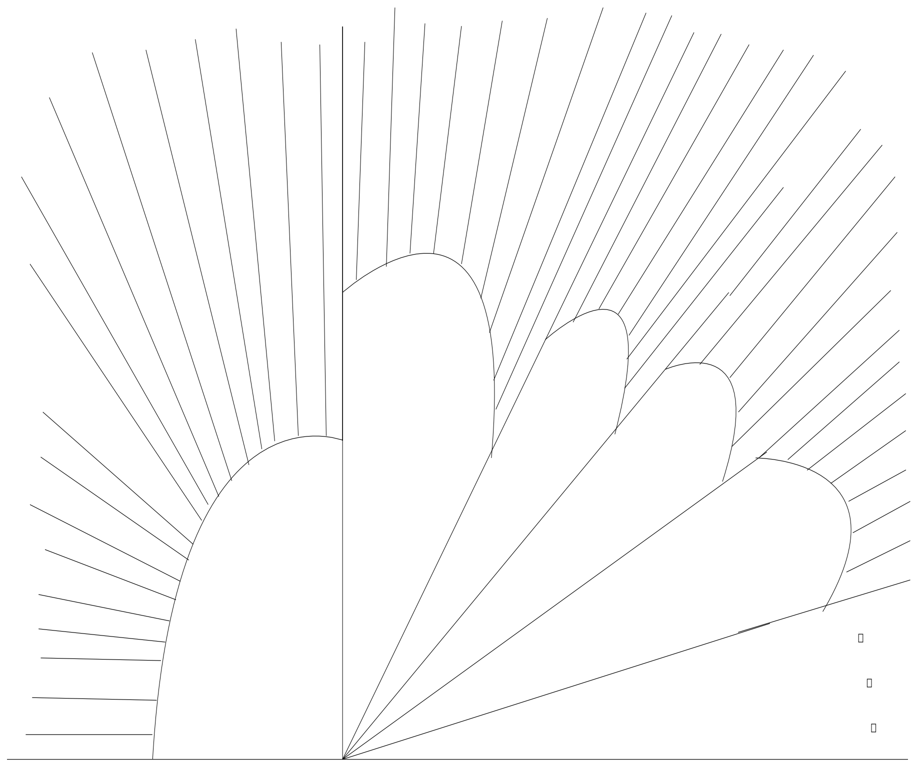


Figure 3: Comb Space

Ιδιότητες του "Χτενόχορου"

a) $dim(\partial X) = 0$. Για κάθε n έχουμε ότι το K_n είναι φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι ορίζουμε ένα πεπερασμένο αριθμό κορυφών σε κάθε K_n οπότε προσθέτουμε πεπερασμένο αριθμό γεωδαισιακών ακτίνων. Οπότε, όλες οι άπειρες γεωδαισιακές ακτίνες είναι αριθμήσιμες. Οπότε και το ∂X είναι αριθμήσιμο. Κάθε αριθμήσιμος μετρικός χώρος έχει τοπολογική διάσταση 0 (βλέπε [20] σελίδα 18). Οπότε $dim(\partial X) = 0$.

b) Ο X είναι υπερβολικός χώρος με την "μετρική των μονοπατιών (path metric)". Όντως αφού κάθε ζεύγος σημείων του X μπορεί να ενωθεί με ένα μονοπάτι πεπερασμένου μήκους. Επίσης έστω l μια κλειστή καμπύλη στον X τότε l είναι κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{H}^2$ και $length(l)_X \geqslant length(l)_{\mathbb{H}^2}$. Όμως αφού ο $\mathbb{H}^2$ είναι υπερβολικός έχουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα $Area(l) \leqslant c * length(l)_{\mathbb{H}^2}$ οπότε $Area(l) \leqslant c *$

$length(l)_X$ που σημαίνει ότι ο X είναι υπερβολικός.(βλέπε [18], [10])

c) $asdim\,(X) = 2$. Αυτό ισχύει μιας και ο X περιέχει οσοδήποτε μεγάλες μπάλες $B(x, n) \subset \mathbb{H}^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

d) Ο X είναι "visual" μετρικός χώρος με $D = 1$ αφού για κάθε x στον X υπάρχει μια γεωδαισιακή από το x_0 στο x. Έστω αυτή g_1. Αν η g_1 επεκτείνεται ως το άπειρο έχουμε τελειώσει. Αν η g_1 είναι πεπερασμένη, τότε το x πρέπει να ανήκει σε έναν τομέα $S(a_n, a_{n+1}, N_n)$. Επεκτείνουμε την g_1 μέχρι να τμήσει το K_n στο σημείο v_1. Τότε από την κατασκευή του X υπάρχει μια άπειρη γεωδαισιακή r που αντιστοιχεί σε μια κορυφή του K_n την v τέτοια ώστε $d(v_1, v)$ είναι λιγότερο από 1. Οπότε προφανώς $d(x, r)$ είναι μικρότερο από ένα 1.

Οπότε έχουμε ότι $asdim\,X > dim\,\partial X + 1$. Αυτό το παράδειγμα μπορεί να μετατραπεί ελαφρά για να δώσει οσοδήποτε μεγάλη $asdim\,X$ χωρίς να αλλάξει το $dim\,\partial X$ θεωρώντας αντί το υπερβολικό επίπεδο το $\mathbb{H}^n$ και τροποποιώντας κατάλληλα την κατασκευή.
Ακολουθεί ένας ορισμός Ασυμπτωτικής Διάστασης που χρησιμοποιεί "χάρτες" και "simplicial complexes". Δεν θα μπούμε σε λεπτομέρειες, απλά θα σημειώσουμε ότι είναι ο ορισμός με τις περισσότερες εφαρμογές πλέον στην συγκεκριμένη θεωρία.

Ορισμός 5.2 *(**ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ**) Έστω X ένας γνήσιος μετρικός χώρος. Λέμε ότι έχει ασυμπτωτική διάσταση $\leqslant n$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας ϵ-Lipschitz και "uniformly cobounded" χάρτης από τον X σε ένα n-διάστατο πολύεδρο, (το οποίο είναι η γεωμετρική απεικόνιση ενός n-διάστατου "simplicial complex") με την κατάλληλη μετρική.*

Ο παραπάνω ορισμός εισήχθη από τον Gromov στο [19] και εξελίχθηκε από τον Dranishnikov. Είναι ισοδύναμος με όλους τους προηγούμενους. Μικρή απόδειξη τις ισοδυναμίας όλων των ορισμών υπάρχει στο [24]. Οι λεπτομέρειες και οι ορισμοί που περιέχονται στο παραπάνω είναι πολύ τεχνικοί και δεν αποτελούν σκοπό αυτής της εργασίας. Παραθέτουμε αυτόν τον ορισμό απλά λόγω της σύγχρονης σπουδαιότητας του.

Ακολουθεί ο ορισμός των χώρων με "ένα πέρας". Το κύριο θεώρημα της εργασίας αυτής χρησιμοποιεί συνεχώς τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.3 *Ένας γεωδαισιακός μετρικός χώρος X λέμε ότι έχει* **ένα πέρας** *(ή είναι* **one-ended***) αν για κάθε φραγμένο υποσύνολο του K, το $X-K$ έχει ακριβώς μια μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα. Λέμε ότι ο X έχει* **ομοιόμορφα ένα πέρας** *(ή είναι* **ομοιόμορφα one-ended***) αν για κάθε $n \in \mathbb{R}^+$ υπάρχει ένα $m \in \mathbb{R}^+$ τέτοιο ώστε για κάθε $K \subset X$ με $diam\, K < n$, το $X - K$ έχει ακριβώς μια συνεκτική συνιστώσα διαμέτρου $> m$.*

Παράδειγμα 5.1 *Ο $\mathbb{R}^+$ έχει ένα πέρας αλλά δεν έχει ομοιόμορφα ένα πέρας.*

Παράδειγμα 5.2 *$\mathbb{R}^2$ είναι ομοιόμορφα "one-end" αφού για κάθε x στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε $K = \overline{B}(x,d) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(y,x) \leqslant n-1$ την κλειστή μπάλα του x ακτίνας $n-1$. Τότε η K είναι συμπαγής και το $X - K = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x,y) > n+1\}$. Προφανώς το $X-K$ έχει μια συνεκτική συνιστώσα διαμέτρου $> m$ για $m = n+1$ και $diam(K) < n$. Η απόδειξη με αυτόν τον τρόπο γενικεύεται από τις μπάλες στα συμπαγή σύνολα K του X.*

Παράδειγμα 5.3 *$\mathbb{R}^n$ είναι ομοιόμορφα "one-ended".*

Η απόδειξη είναι εντελώς ίδια με την απόδειξη για το $\mathbb{R}^2$. Προχωρούμε τώρα στο βασικό αποτέλεσμα αυτής της εργασίας. Πριν όμως διατυπώσουμε το θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε ένα πολύ απλό λήμμα το οποίο δίνεται πολλές φορές ως άσκηση στα βιβλία συνδυαστικής θεωρίας ομάδων.

Λήμμα 5.1 *Αν G είναι μια one-ended πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα τότε, η G έχει μια άπειρη γεωδαισιακή.*

Θεώρημα 5.4 *Αν G είναι μια πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα με ένα πέρας τότε $asdimG \geqslant 2$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $asdim\, G \neq 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $asdim\, G = 0$ και σταθεροποιούμε $d > 0$. Τότε σύμφωνα με τον πρώτο ορισμό έχουμε ότι $G = X_1$ όπου $X_1 = \bigcup B_i$ με:

1. $diamB_i \leqslant D \; \forall\, i \in I$
2. $d(B_i, B_j) \geqslant d \; \forall\, i \neq j$.

Αυτό σημαίνει ότι η G είναι d-διακριτή. Αφού η G είναι συνεκτικό γράφημα μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε δύο διαφορετικά B_i. Οπότε $G = B_1$ που σημαίνει ότι η G είναι D-φραγμένη. Όμως η είναι G one-ended οπότε περιέχει μια άπειρη γεωδαισιακή άρα δεν είναι φραγμένη.

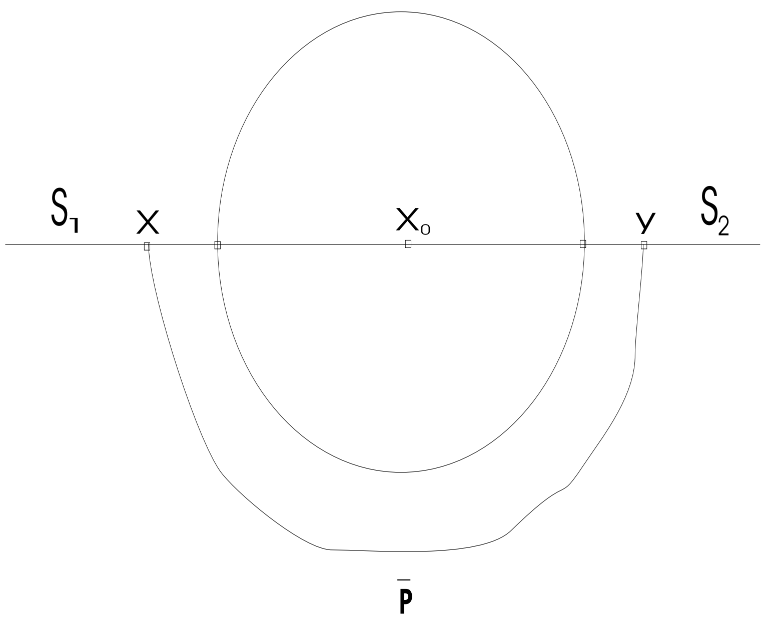
Τώρα δείχνουμε ότι $asdim\, G \neq 1$. Ας υποθέσουμε ότι $asdim\, G = 1$.

Έστω $M = \max\{|r_i|, i = 1, 2, ..., n$: οι σχέσεις της $G\}$, όπου $|r|$ = μήκος της λέξης r. Σταθεροποιούμε $d > 100M + 100$. Αφού $asdim\, G = 1$ κατασκευάζουμε ένα κάλυμμα $\mathbb{B} = \{B_i\}$ με:

$$G \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$$

και $diamB_i < D \ \forall i \in I$ έτσι ώστε κάθε μπάλα $B(x_0, d)$ τέμνει το πολύ 2 σύνολα του καλύμματος $\mathbb{B}$.

Αφού η G έχει ένα πέρας έχουμε ότι η G έχει μια άπειρη γεωδαισιακή την οποία ονομάζουμε S. Έστω $N = max\{100D^{100}, 300M\}$. Επιλέγουμε ένα $x_0 \in S$ και θεωρούμε την μπάλα $B(x_0, N)$ η οποία διαχωρίζει την γεωδαισιακή σε δύο γεωδαισιακές ακτίνες S_1 και S_2. Αφού η G είναι one-ended υπάρχει ένα x στην S_1, ένα y στην S_2 και ένα μονοπάτι p με $p(0) = x$ και $p(t) = y$ τέτοιο ώστε $p \bigcap B(x_0, N) = \emptyset$ έτσι καταλήγουμε στο εξής σχήμα:



Συμβολίζουμε με $[x, y]$ το μέρος της γεωδαισιακής S, που συνδέει το x και το y. Προφανώς $length([x, y]) \geqslant 2N$. Με w συμβολίζουμε το μονοπάτι $[x, y] \bigcup p$.

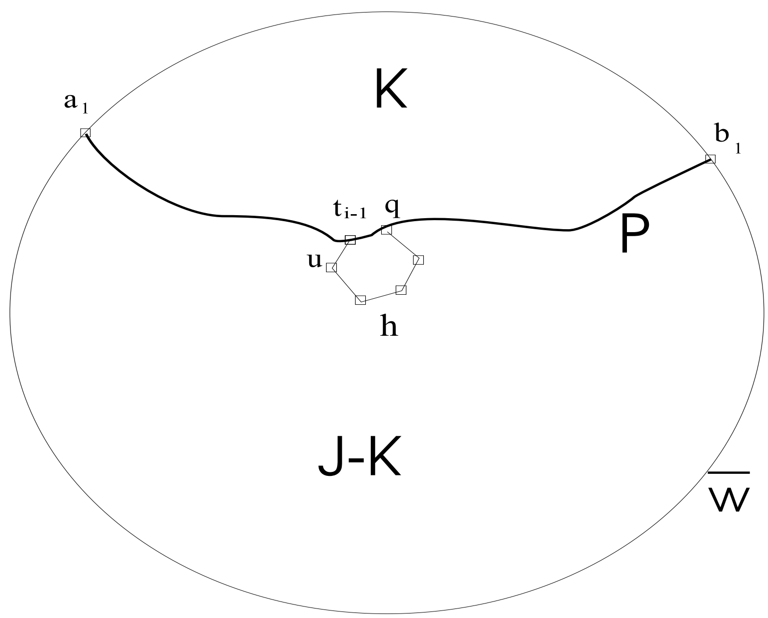
Έχουμε τότε ότι $length(w) = l(w) = l([x, y]) + l(p) \geqslant 2N + l(p) \Rightarrow l(w) > 200D$. Οπότε για να καλύψουμε το μονοπάτι w χρειαζόμαστε τουλάχιστον 3 σύνολα του καλύμματος $\{B_i\}$.

Έστω B_1 ένα σύνολο του καλύμματος τέτοιο ώστε $x_0 \in B_1$. Με a_1 σημειώνουμε την κορυφή του S που περιέχεται στο B_1 έτσι ώστε $d(a_1, x) \leqslant d(z, x)$ για κάθε $z \in S \bigcap B_1$. Με a_2 σημειώνουμε την κορυφή του S που περιέχεται στο B_1 τέτοιο ώστε $d(a_1, y) \leqslant d(z, y)$. Έστω b_1 να είναι η γειτονική κορυφή στην a_2 που βρίσκεται στην γεωδαισιακή και δεν ανήκει στο B_1. Αν και οι δύο a_1 και b_1 ανήκουν στο ίδιο B_2, αντικαθιστούμε το B_1 από το B_2 και ξεκινούμε την διαδικασία ξανά.

Σε κάθε βήμα η απόσταση των a_1 και a_2 από x_0 αυξάνεται κατά D το πολύ. Αυτό σημαίνει ότι μετά από $[D] + 1$ βήματα η απόσταση από το κέντρο x_0 του $[x, y]$ του συνόλου B_1 θα είναι το πολύ $D^2 + D$ που σημαίνει ότι $d(B_1, x_0) < D^2 + 10D < N$. Προφανώς $diam(B_2 \bigcap S) > diam(B_1 \bigcap S) + 1$ σε κάθε βήμα της διαδικασίας. Οπότε η διαδικασία πρέπει να τελειώνει σε κάποιο σημείο αφού $diam(B_i \bigcup S) < diam(B_i) < D$.

Από την διαδικασία αποκτούμε ένα σύνολο B_1 που καλύπτει ένα μέρος της γεωδαισιακής που βρίσκεται μέσα στην μπάλα $S(x_0, N)$ και η γειτονική κορυφή της a_2 περιέχεται σε ένα σύνολο B_2 που δεν περιέχει και την a_1. Οπότε θεωρούμε το van Kampen διάγραμμα $\mathfrak{D}$ που αντιστοιχεί στην w και την συνάρτηση f από το $\mathfrak{D}^{(1)}$ στο Cayley γράφημα της G. Θέτουμε K την συνεκτική συνιστώσα του $f^{-1}(B_1 \bigcup B_2)$ που περιέχει τα $f^{-1}(a_1) \kappa\alpha\iota f^{-1}(a_2)$. Προφανώς $\mathfrak{D} - K \neq \emptyset$.

Θέτω $P = \overline{\mathfrak{D} - K} \bigcap \overline{K}$. Τότε η $P \bigcap w$ περιέχει την a_1 που ανήκει στο $f^{-1}(B_1)$ και την b_1 που ανήκει στο $f^{-1}(B_2)$. Αφού η P είναι συνεκτική υπάρχει ένα μονοπάτι από το a_1 στο b_1 που είναι στο σύνορο P. Έστω οι κορυφές του P να είναι $t_1 = a_1, t_2, ..., t_n = b_1$. Οπότε διαλέγουμε το πρώτο t_i που ανήκει στο $f^{-1}(B_2)$ και δεν περιέχεται στο $f^{-1}(B_1)$. Αφού η t_i ανήκει στο P υπάρχει μια λέξη h στο $\overline{\mathfrak{D} - K}$ που περιέχει το t_i. Έστω τώρα u μια κορυφή του h τέτοια ώστε η u δεν ανήκει στο P (βλέπε παρακάτω σχήμα).



Οπότε $d(u, t_i) \leqslant M$ και έχουμε:

$$d(u, f^{-1}(B_2)) \leqslant M \Rightarrow d(f(u), B_2) \leqslant M < d.$$

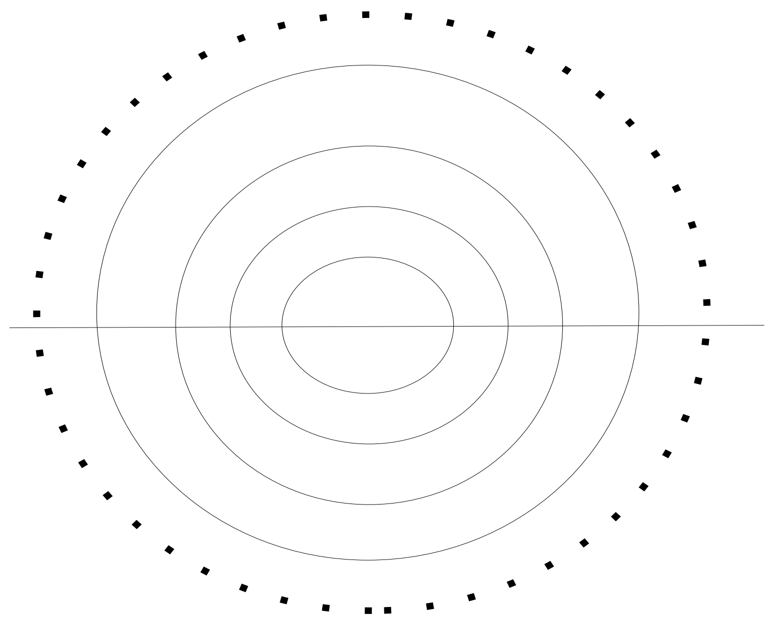
Επίσης έχουμε ότι $d(u, t_{i-1}) < d(u, t_i) + 1 < M + 1 < d$ που δίνει ότι:

$$d(u, f^{-1}(B_2)) < d \Rightarrow d(f(u), B_2) < d.$$

Προφανώς το u δεν ανήκει στο $f^{-1}(B_1)$ ούτε στο $f^{-1}(B_2)$, οπότε $f(u)$ δεν ανήκει στο B_1 ούτε στο B_2. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα B_3 τέτοιο ώστε το $f(u)$ ανήκει στο B_3. Αν $v = f(u)$ τότε η $B(v, d)$ τέμνει τα B_1, B_2, B_3. Άτοπο. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. ∎

Παρατήρηση 5.1 *Σημειώνουμε ότι η παραπάνω απόδειξη ισχύει και για ομοιόμορφα "one-ended", απλά συνεκτικά, "simplicial complexes".*

Βεβαίως το αποτέλεσμα δεν ισχύει για "one-ended", απλά συνεκτικά, "simplicial complexes", με την ημιευθεία να είναι ένα απλό αντιπαράδειγμα. Επίσης υπάρχουν "one-ended" γραφήματα (ακόμη και ομοιόμορφα "one-ended") που έχουν ασυμπτωτική διάσταση 1. Ένα παράδειγμα είναι το παρακάτω:



Ισχύει το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 5.5 *(Dunwoody-Stallings [17]) Αν G είναι πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα τότε η G είναι η θεμελιώδης ομάδα ενός γραφήματος ομάδων τέτοιο ώστε όλες οι ομάδες-κορυφές είναι "0-ended" ή "1-ended".*

Επίσης είναι γνωστό ότι:

Πρόταση 5.5 *Αν όλες οι ομάδες κορυφών είναι 0-ended (δηλαδή πεπερασμένες) τότε η G είναι βασικά ελεύθερη.(βλέπε [25], σελίδα 120, πρόταση 11.)*

Επίσης ισχύει το παρακάτω λήμμα :

Λήμμα 5.2 *Αν $H < G$ και H είναι πεπερασμένα παραγόμενη τότε $asdim G \geqslant asdim\, H$*

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Dunwoody-Stallings και τα παραπάνω έχουμε το πλέον ισχυρό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.6 *Αν G είναι μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα με $asdim G = 1$ τότε η G είναι βασικά ελεύθερη και το αντίστροφο.*

Απόδειξη. Έστω G μια π.π. ομάδα με $asdim G = 1$. Έστω Γ το γράφημα ομάδων του Θεωρήματος Dunwoody-Stallings. Αν μια ομάδα-κορυφή H έχει ένα πέρας τότε από το θεώρημα $asdim H \geqslant 2$. Όμως $H < G$ που σημαίνει ότι $asdim G \geqslant 2$ πράγμα άτοπο. Άρα όλες οι ομάδες-κορυφές είναι "0-ended". Άρα η G είναι virtually free. Αντίστροφα έστω G virtually free ομάδα και έστω H μια ελεύθερη υποομάδα της πεπερασμένου δείκτη. Τότε εύκολα δείχνουμε ότι το Cayley γράφημα της H είναι σχεδόν-ισομετρικό με το Cayley γράφημα της G. Αφού όμως η H είναι ελεύθερη το γράφημα της είναι ένα δέντρο. Όπως δείξαμε τα δέντρα έχουν ασυμπτωτική διάσταση 1. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε την ζητούμενη αντίστροφη φορά. ∎

Εδώ τελειώνει η παράγραφος και μαζί και η εργασία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] G.Bell *Asymptotic properties of groups acting on complexes*, Proc. Amer. MAth.Soc. 133(2005),no. 2,387-396.

[2] G.Bell and A.Dranishnikov,*A Hurewicz-type theorem for aymptotic dimension and applications to geometric group theory*, Preprint arXiv: math.GR/0407431(2004).

[3] G.Bell and A.Dranishnikov, *On asymptotic dimension of groups*, Algebraic and Geometric Topology Vol.1,57-71 (2001).

[4] G.Bell and A.Dranishnikov with J.Keesling, *On a formula for asymptotic dimension of free products*, Fund. Math. 183(2004), no. 1,39-45.

[5] M.Bonk and O.Schramm, *Embeddings Of Gromov Hyperbolic Spaces*, Gafa Geom.Funct.Anal ,Vol 10(2000) ,266-306.

[6] S.Buyalo, *Capasity dimension and embedding of hyperbolic spaces into the product of trees*, Algebra i analys (St.Petersburg Math.J.),17,n.4(2005),39-55(russian);arXive:math.GT/0505429.

[7] S.Buyalo, *Asymptotic dimension of a hyperbolic space and capacity dimension on its boundary at infinity* , arXiv:math.Gt/0505427 v1 20 May 2005.

[8] S.Buyalo and N.Lebedeva, *Capacity dimension of locally self-similar spaces*

[9] S.Buyalo and V.Shroeder,*Embedding of hyperbolic spaces in the product of trees*, arXive: math. GT/0311524 (2003).

[10] B.H.Bowditch, *A short proof that a Subquadratic Isoperimetric Inequality Implies a Linear One* , Michigan Math J.42(1995).

[11] A.Dranishnikov, *On Asymptotic Inductive Dimension* ,Mathematics Subject Classification (1991). Primary 54F45,54d3.

[12] A.Dranishnikov, *Asymptotic topology*, Russian Math.Surveys 55(2000), No 6, 71-116.

[13] A.Dranishnikov, *On hypersphericity of manifolds with finite asymptotic dimension*, Trans.Amer.Math.Soc. 355(2003), no. 1,155-167.

[14] A.Dranishnikov, *Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension*,Proc.Amer.Math.Soc. 133(2005),no. 9, 2489-2490.

[15] A.Dranishnikov, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into a Hilbert space*, Inventiones Mahtematicae 138(2000) 201-240.

[16] A.Dranishnikov and V.Shroeder, *Embedding of hyperbolic Covxeter groups into products of binary trees and aperiodic tilings*, arXive: math.GR/0504566.

[17] M.Dunwoody, *The accessibility of finitely presented groups*, Invent. Math. 81 (1985), No 3, 449-457.

[18] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory (S. M. Gersten, ed.), MSRI Publ. 8, Springer-Verlag, 1987 pp. 75-263.

[19] M.Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups* , 'Geometric group theory', (G.Niblo, M.Roller, Eds.), LMS Lecture Notes, vol. 182, Cambridge Univ. Press (1993).

[20] W.Hurewicz and H.Wallman, *Dimension Theory* Prin.Un.Press.

[21] T.Januszkiewicz and J.Swiatkowski, *Filling Invariants In Systolic Complexes and Groups* "preprint" (June 2005).

[22] R.Lyndon and P.Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer - Verlag (1970).

[23] D.Osin, *Asymptotic Dimension Of Relatively Hyperbolic Groups* arXiv:math.Gr/0411585 v2 4 May 2005

[24] J.Roe, *Lectures On Coarse Geometry*, Univ. Lect. Series Vol. 31 Amer.Math.Society.(2003).

[25] J.P.Serre, *Trees*, Springer - Verlag (1980).

[26] H.Short et al, *Group Theory from a Geometrical Viewpoint* eds. Ghys, Haefliger,Verjosky, World Scientific (1991).

[27] J.Smith, *On aymptotic dimension of countable abelian groups*, Preprint: arXiv math.GR/0504447 (2005)

[28] J.Swiatkowski *On the aymptotic homological dimension of hyperbolic groups*, Bull. London Math. Soc. 27(1995), no. 3,209-221

[29] Urysohn, *Uber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math.Ann 94(1925).

[30] G.Yu, *The Novicov conjecture for groups with finite asymptotic dimension*, Ann. of Math. 147(1998) ,No 2 , 325-335.